Т.В. Труфанова, А.Е. Ситун

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Часть II. Уравнения n-го порядка

Министерство образования Российской Федерации
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет математики и информатики

Т.В. Труфанова, А.Е. Ситун

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Часть II. Уравнения n-го порядка

Благовещенск

ББК 22.161.6я73
Т80

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета математики и информатики Амурского государственного университета

Т.В. Труфанова, А.Е. Ситун
Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Часть II. Уравнения n-го порядка. Учебно-методическое пособие. Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2001.

Пособие содержит краткие теоретические сведения по общему курсу «Дифференциальные уравнения». Подробно рассматриваются методы решения основных типов дифференциальных уравнений n-го порядка. Студентам предлагаются варианты самостоятельной работы по данной теме. Материал пособия позволяет выработать практические навыки в решении и исследовании дифференциальных уравнений.

Пособие предназначено для студентов специальностей 010100 – математика, 010200 – прикладная математика, 010400 – физика.

Рецензент: А.И. Родионов, доцент кафедры ТМ и СМ НГТУ, канд. физ.-мат. наук.

§1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

*Дифференциальное уравнение **n-го порядка*** имеет вид

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\,, \qquad (1)$$

где x – независимая переменная, y – искомая функция, а функция F определена и непрерывна в некоторой области $G \subseteq \mathbf{R}^{n+2}\,(n \geq 1)$.

*Дифференциальное уравнение **n-го порядка,** разрешенное относительно **старшей** производной,* имеет вид

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) = 0\,, \qquad (2)$$

где функция f также предполагается непрерывной в некоторой области $D \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ изменения своих аргументов.

<u>Решением уравнения (2)</u> на интервале (a,b) называется функция $y(x)$, удовлетворяющая условиям:
1) $y(x)$ непрерывно дифференцируема n раз на (a,b);
2) $\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right) \in D, \forall x \in (a,b)$;
3) $y(x)$ обращает уравнение (2) в тождество $\forall x \in (a,b)$.

Аналогично определяется решение уравнения (1).

<u>Задачей Коши</u> для дифференциального уравнения (2) называется задача отыскания решения $y(x)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0\,,\; y'(x_0) = y'_0\,, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (3)$$

где $x_0 \in (a,b)$, y_0, $y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

<u>Теорема Пеано.</u> Если функция f непрерывна в области D, то для любой точки $\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}\right) \in D$ существует решение уравнения (2), определенное в некоторой окрестности точки $x_0 \in (a,b)$ и удовлетворяющее условиям (3).

Существование и единственность решения задачи Коши определяется следующей теоремой.

<u>Теорема Коши – Пикара.</u> Если функция f непрерывна в области D и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то для любой точки $\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}\right) \in D$ существует единственное решение уравнение (2), определенное в некоторой окрестности точки $x_0 \in (a,b)$ и удовлетворяющее условиям (3).

<u>Общим решением</u> уравнения (1) или (2) называется такая функция $y = \varphi(x, c_1, \ldots, c_n)$, которая при любых допустимых значениях параметров $c_1, c_2, \ldots, c_n$ является решением этого дифференциального уравнения и для любой задачи Коши с условиями (3) найдутся постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$, определяемые из системы уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0 c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ y'_0 = \varphi'(x_0 c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ \ldots. \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0 c_1, c_2, \ldots, c_n) \end{cases}.$$

Уравнение

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0, \tag{4}$$

определяющее общее решение как неявную функцию, называется **общим интегралом** дифференциального уравнения.

<u>Частным решением</u> уравнения (1) или (2) называется любое решение, получаемое из общего решения при конкретных числовых значениях $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Аналогично вводится понятие частного интеграла.

Если $y(x)$ – решение уравнения (1), то график функции $y = y(x)$ называется интегральной кривой уравнения (1).

Геометрически общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости, зависящие от n параметров $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Функция $\phi(x)$ называется особым решением дифференциального уравнения (1), если:

1) $\phi(x)$ обращает дифференциальное уравнение (1) в тождество;
2) для любой точки $x_0 \in (a,b)$ задача Коши с начальными условиями $y(x_0) = \phi(x_0), y'(x_0) = \phi'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \phi^{(n-1)}(x_0)$ имеет более одного решения.

§ 2. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, РАЗРЕШАЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

2.1 Уравнение вида

$$F\left(x, y^{(n)}\right)=0, \tag{5}$$

которое содержит только производную *n*-го порядка искомой функции и независимую переменную.

Запишем уравнение (5) в параметрической форме $x=\varphi(t)$, $y^{(n)}=\phi(t)$, где $\varphi(t)$ – дифференцируемая функция. Общий интеграл уравнения (5) найдется в параметрической форме.

Имеем $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx$, $dy^{(n-1)}=\phi(t)\,\varphi'(t)dt$, откуда $y^{(n-1)}=\int\varphi'(t)\,\phi(t)\,dt+c_1=\phi_1(t,c_1)$.

Аналогично находим $y^{(n-2)}$ и т.д. Система $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\phi_n(t,c_1,c_2,...,c_n) \end{cases}$ является общим интегралом уравнения (5).

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'''=\sqrt{1-x^2}$.

Решение. Введем параметр *t,* положив $x=\sin t\left(t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$, тогда $y'''=|\cos t|=\cos t$.

Данное уравнение в параметрической форме имеет вид:

$$x=\sin t,\ y'''=\cos t .$$

Проинтегрируем полученное выражение

$$dy''=y'''dx=\cos^2 tdt,\ y''=\int\cos^2 tdt+\frac{c_1}{2},\ y''=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t+c_1\right);$$

$$dy'=y''dx=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t+c_1\right)\cos tdt,\ y'=\frac{1}{2}\int\left(t\cos t+\frac{1}{2}\sin 2t\cos t+c_1\cos t\right)dt+\frac{c_2}{2},$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(t\sin t+\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t+c_1\sin t+c_2\right);$$

$$dy=y'dx=\frac{1}{2}\left(t\sin t+\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t+c_1\sin t+c_2\right)\cos tdt,$$

$$y=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}t\sin 2t+\cos^2 t-\frac{1}{3}\cos^4 t+\frac{1}{2}c_1\sin 2t+c_2\cos t\right)dt+\frac{c_3}{2},$$

$$y=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}t\cos 2t+\frac{3}{8}t+\frac{7}{24}\sin 2t-\frac{1}{96}\sin 4t-\frac{1}{4}c_1\cos 2t+c_2\sin t+c_3\right).$$

Общее решение в параметрической форме записывается

$$\begin{cases} x = \sin t \left(t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right] \right) \\ y = -\dfrac{1}{8} t \cos 2t + \dfrac{3}{16} t + \dfrac{7}{48} \sin 2t - \dfrac{1}{192} \sin 4t - \dfrac{c_1}{8} \cos 2t + \dfrac{c_2}{2} \sin t + \dfrac{c_3}{2}, \end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

<u>Пример 2.</u> Найти частное решение уравнения $y''^2 - x^2 = 1$, *y(0)=0*, *y'(0)=1*.

Решение. Решим задачу Коши. Для этого найдем общее решение заданного уравнения и, учитывая начальные условия, получим частное решение уравнения. Введем параметр *t,* положив $x = \operatorname{sh} t,\ t \in \mathbf{R}$. Тогда $y''^2 = 1 + sh^2 t = ch^2 t$, $|y''| = cht$.

Запишем заданное уравнение в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh} t \\ y'' = \operatorname{ch} t, \end{cases}$$

имеем:

$$dy' = y'' dx = \operatorname{ch}^2 t dt,\ y' = \int \operatorname{ch}^2 t dt + c_1,$$

$$y' = \frac{1}{2} \int (1 + \operatorname{ch} 2t) dt + c_1 = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t + c_1,$$

$$dy = y' dx = \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t + c_1 \right) \operatorname{ch} t\, dt,$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2} \mathrm{t} \operatorname{ch} t + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t \operatorname{ch} t + c_1 \operatorname{ch} t \right) dt + c_2,$$

$$y = \frac{1}{2} t \operatorname{sh} t - \frac{1}{2} \operatorname{ch} t + \frac{1}{6} \operatorname{ch}^3 t + c_1 \operatorname{sh} t + c_2.$$

Запишем общее решение уравнения в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh} t \\ y = \dfrac{1}{2} t \operatorname{sh} t - \dfrac{1}{2} \operatorname{ch} t + \dfrac{1}{6} \operatorname{ch}^3 t + c_1 \operatorname{sh} t + c_2. \end{cases}$$

Учитывая начальные условия, найдем C_1 и C_2. Если *x=0,* то sh *t=0* или $\frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) = 0$, откуда $t_0 = 0$. Подставляя в решение *t=0*, *y(0)=0*, *y'(0)=*1, получим $c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{3}$. Запишем частное решение уравнения в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh} t \\ y = \dfrac{1}{2} t \operatorname{sh} t - \dfrac{1}{2} \operatorname{ch} t + \dfrac{1}{6} \operatorname{ch}^3 t + \operatorname{sh} t + \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Выразим t через x. Имеем $\frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) = x$, $e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0$, откуда

$$e^t = x + \sqrt{x^2+1}, \; t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \; \operatorname{ch} t = \sqrt{x^2+1}.$$

Частное решение уравнения записывается

$$y = \frac{1}{2} x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{6}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3} + x + \frac{1}{3}.$$

2.2. Уравнения вида

$$y^{(n)} = f(x) \tag{6}$$

Данное уравнение рассматривается как частный случай уравнения (5), где *f(x)* непрерывная функция на (a,b).

Если принять $x = x \in (a,b)$ в качестве параметра, то общее решение уравнения (6) получим в форме: $y = \int\int\ldots\int f(x)dxdx\ldots dx + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}x + c_n$

Общее решение уравнения (6) в форме Коши имеет вид:

$$y = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx\ldots dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + \ldots + y_0'(x-x_0) + y_0,$$

где $x_0 \in (a,b), y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ - любые числа.

<u>Пример 3</u>. Найти общее решение уравнения $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Решение. Интегрируя первый раз, получим

$$y' = \operatorname{tg} x + c_1.$$

Повторное интегрирование приводит к общему решению

$$y = -\ln|\cos x| + c_1 x + c_2.$$

2.3. Уравнения вида

$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0 \tag{7}$$

Если данное уравнение разрешимо относительно $y^{(n)}$, т.е. $y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right)$, то, вводя новую функцию $u = y^{(n-1)}$, приведем уравнение к виду $u' = f(u)$. Общий интеграл полученного уравнения имеет вид: $x + c_1 = \int \frac{du}{f(u)} \quad (f(u) \neq 0)$

или

$$u = \phi(x, c_1), \; y^{(n-1)} = \phi(x, c_1), \; y = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{n-1} \phi(x, c_1)dxdx\ldots dx + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}x + c_n.$$

Если уравнение (7) имеет параметрическое представление $y^{(n)}=\varphi(t)$, $y^{(n-1)}=\phi(t)$,

то $$dy^{(n-1)}=y^{n}dx,\ dx=\frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}}=\frac{\phi'(t)}{\varphi(t)}dt,$$

откуда $x=\int\frac{\phi'(t)}{\varphi(t)}dt+c_1=\xi(t,c_1)$.

Далее $dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}dx=\frac{\phi(t)\phi'(t)}{\varphi(t)}dt$, $y^{(n-2)}=\int\frac{\phi(t)\phi'(t)}{\varphi(t)}dt+c_2$, $dy^{(n-3)}=y^{(n-2)}dx$,

$$dy=y'dx,\quad y=\int y'dx+c_n=\eta(t,c_2,c_3,...,c_n).$$

Общий интеграл уравнения (7) записывается в параметрической форме:

$$\begin{cases}x=\xi(t,c_1)\\ y=\eta(t,c_2,c_3,...,c_n).\end{cases}$$

<u>Пример 4.</u> Найти общее решение уравнения $y'''y''=\sqrt{1+y''^2}$.

Решение. Пусть $y''=u$, тогда $u'u=\sqrt{1+u^2}$, $\frac{udu}{\sqrt{1+u^2}}=dx$, $\sqrt{1+u^2}=x+c_1$, $u=\pm\sqrt{(x+c_1)^2-1}$, или $y''=\pm\sqrt{(x+c_1)^2-1}$.

Последовательным интегрированием находим

$$y'=\pm\left[\frac{1}{2}(x+c_1)\sqrt{(x+c_1)^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+c_1+\sqrt{(x+c_1)^2-1}\right|\right]+c_2,$$

$$y=\pm\left[\frac{1}{6}\sqrt{\left((x+c_1)^2-1\right)^3}-\frac{1}{2}(x+c_1)\ln\left|x+c_1+\sqrt{(x+c_1)^2-1}\right|+\frac{1}{2}\sqrt{(x+c_1)^2-1}\right]+c_2x+c_3.$$

Знак плюс соответствует общему решению для области $y''>0$, знак минус – для области $y''<0$.

<u>Пример 5.</u> Найти решение задачи Коши $y''-2y'=1$, $y(0)=\frac{5}{4}$, $y'(0)=1$.

Решение. Пусть $y'=u$, тогда $u'-2u=1$, $\frac{du}{1+2u}=dx$, $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+2u}{c_1}\right|=x$, $u=c_1e^{2x}-\frac{1}{2}$ или $y'=c_1e^{2x}-\frac{1}{2}$.

Интегрируя полученное уравнение, находим общее решение:

$$y=\frac{1}{2}c_1e^{2x}-\frac{1}{2}x+c_2.$$

Учитывая начальные условия, определим c_1 и c_2: $c_1=\frac{3}{2}$, $c_2=\frac{1}{2}$.

Частное решение уравнения запишется $y=\frac{3}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

2.4. Уравнения вида

$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (8)$$

С помощью замены $y^{(n-2)} = u$ уравнение (8) приводится к уравнению второго порядка $F(u, u'') = 0$.

Если полученное уравнение разрешимо относительно функции u'', то, учитывая замену, получаем промежуточный интеграл вида:

$$\phi\left(x, y^{(n-2)}, c_1, c_2\right) = 0,$$

т.е. дифференциальное уравнение (*n-2*) порядка, которое интегрируется в квадратурах.

Пример 6. Понизить порядок уравнения до первого порядка (решать уравнение не требуется) $y''' - y' = 1$.

Решение. С помощью замены $y' = u$ приведем данное уравнение к уравнению второго порядка $u'' - u = 1$, $u'' = 1 + u$.
Умножая на интегрирующий множитель $\mu = 2u'$, приходим к уравнению

$$2u'u'' = 2(1+u)u'.$$

Интегрируя, получим первый интеграл уравнения

$$u'^2 = \frac{2(1+u)^2}{2} + c_1, \quad u'^2 = (1+u)^2 + c_1.$$

Откуда находим общий интеграл вспомогательного уравнения

$$u' = \pm\sqrt{(1+u)^2 + c_1}, \quad \pm\frac{du}{\sqrt{(1+u)^2 + c_1}} = dx, \quad x + c_2 = \ln\left|1 + u + \sqrt{(1+u)^2 + c_1}\right|.$$

Возвращаясь от переменной u к y', получим уравнение первого порядка

$$x + c_2 = \ln\left|1 + y' + \sqrt{(1+y')^2 + c_1}\right|.$$

§3. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Ниже приводятся некоторые виды дифференциальных уравнений *n*-го порядка, допускающие понижение порядка.

3.1. Уравнения вида

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (9)$$

т.е. уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка *k-1* включительно.

С помощью замены $y^{(k)} = p(x)$, где $p(x)$, новая неизвестная функция, порядок уравнения понижается на *k* единиц: $F(x, p, p', ..., p^{(n-k)}) = 0$.
Предположим, что для полученного уравнения мы можем найти общее решение $p(x) = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_{n-k})$.

Следовательно имеем промежуточный интеграл $y^{(k)} = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_{n-k})$.
Общее решение уравнения (9) получается путем *k*-кратного интегрирования обеих частей полученного выражения.

<u>Пример 1</u>. Найти частное решение уравнения

$$x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1,\ y(1) = \frac{1}{2},\ y'(1) = \frac{1}{2},\ y''(1) = -1.$$

Решение. Данное уравнение не содержит *y* и *y'*. Положим $y'' = p(x)$, тогда $y''' = \frac{dp}{dx}$ и уравнение имеет вид $x^4 \frac{dp}{dx} + 2x^3 p = 1$ или $\frac{dp}{dx} + \frac{2}{x} p = \frac{1}{x^4}$.
Это линейное уравнение первого порядка, которое решается заменой $p(x) = u(x)v(x)$, $p' = u'v + uv'$. Производя замену получим:

$$u'v + uv' + \frac{2}{x} uv = \frac{1}{x^4}, \quad v\left(u' + \frac{2u}{x}\right) + v'u = \frac{1}{x^4},$$

откуда, с учетом возможности произвольного выбора функции *u(x)*,

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} + \frac{2u}{x} = 0 \\ \frac{dv}{dx} u = \frac{1}{x^4} \end{cases}.$$

Решая первое уравнение системы, найдем функцию $u = \frac{1}{x^2}$, из второго уравнения – функцию $v = -\frac{1}{x} + c_1$. Найдем функцию $p = uv$, $p = -\frac{1}{x^3} + \frac{c_1}{x^2}$.
Используя начальное условие $y''(1) = p(1) = -1$, получим $c_1 = 0$. Следовательно, $y'' = -\frac{1}{x^3}$, откуда $y' = \frac{1}{2x^2} + c_2$. Начальное условие $y'(1) = \frac{1}{2}$ позволяет найти $c_2 = 0$. Следовательно, $y' = \frac{1}{2x^2}$, $y = -\frac{1}{2x} + c_3$. Из условия $y(1) = \frac{1}{2}$ следует, что $c_3 = 1$.

Итак, искомое частное решение есть $y = 1 - \frac{1}{2x}$.

3.2. **Уравнения вида**

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{10}$$

Уравнение (10) явно не содержит независимую переменную. Подстановкой $y' = p(y)$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, $y''' = p\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\dfrac{d^2p}{dy^2} = pp'^2 + p^2p''$ и т.д. порядок уравнения понижается на единицу.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'y''' - 3y''^2 = 0$.

Решение. Пусть $y' = p(y)$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, $y'' = p\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\dfrac{d^2p}{dy^2}$. Тогда уравнение преобразуется к виду $p\left(p\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\dfrac{d^2p}{dy^2}\right) - 3p^2\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2 = 0$.

Приведя подобные члены и сократив на p^2 (при этом следует учесть теряемое решение $p=0$, или $y=c$), получим: $p\dfrac{d^2p}{dy^2} - 2\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2 = 0$, $pp'' - 2p'^2 = 0$.

Положив здесь $\dfrac{dp}{dy} = z$, $\dfrac{d^2p}{dy^2} = z\dfrac{dz}{dp}$, приводим уравнение к виду:

$$pz\frac{dz}{dp} - 2z^2 = 0.$$

Сократив на z (при этом следует учесть еще одно решение $z = \dfrac{dp}{dy} = 0$, т.е. $p = c_1$ и $y = c_1x + c_2$), получим $\dfrac{dz}{z} - \dfrac{2dp}{p} = 0$, откуда $\ln|z| - \ln p^2 = \ln|c_1|$, или $z = \dfrac{dp}{dy} = -c_1p^2$. Интегрируя последнее уравнение, находим: $-\dfrac{1}{p} = -c_1y - c_2$, или $\dfrac{dx}{dy} = c_1y + c_2$.

Общий интеграл уравнения запишется $x = c_1y^2 + c_2y + c_3$.

В общее решение входят потерянные ранее частные решения.

3.3. **Уравнения вида**

$$\frac{d}{dx}F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = 0, \tag{11}$$

т.е. уравнения, в которых левая часть может быть представлена как полная производная по x **от некоторой функции** $F(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ **.**

Интегрируя по *x*, получим новое уравнение, порядок которого на единицу ниже порядка исходного уравнения. Такие уравнения называются уравнениями в точных производных.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$\left(1+x^2\right)y''+2xy'=x^3 .$$

Решение. Левая часть уравнения есть полная производная по *x* от функции $\left(1+x^2\right)y'$, а правая – от функции $\frac{x^4}{4}$, т.е. уравнение можно переписать так:

$$((1+x^2)y')'=\left(\frac{x^4}{4}\right)'$$

Отсюда интегрированием получаем $\left(1+x^2\right)y'=\frac{x^4}{4}+\frac{c_1}{4}$ или $dy=\frac{x^4+c_1}{4\left(1+x^2\right)}dx$.

Следовательно, $y=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x+\frac{c_1}{4}\operatorname{arctg}x+c_2$ есть общее решение уравнения.

3.4. Уравнения вида

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0 \qquad \textbf{(12)}$$

Однородные относительно функции и ее производных, т.е. такие, что $F(x,\lambda y,\lambda y',...,\lambda y^{(n)})=\lambda^m F(x,y,y',...,y^{(n)})$, $\lambda>0$ **однородности порядка** ***m*****.**

Подстановкой $y'=yz$ порядок уравнения понижается на единицу, где $z=z(x)$ – новая неизвестная функция.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $xyy''-xy'^2-yy'=0$.

Решение. Проверим однородность уравнения.

Пусть

$$F(x,y,y',y'')=xyy''-xy'^2-yy',$$

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=x\lambda y\lambda y''-x(\lambda y')^2-\lambda y\lambda y'=\lambda^2\left(xyy''-xy'-yy'\right)=$$

$$=\lambda^2 F\left(x,y,y',y''\right),\quad m=2.$$

Положим $y'=yz$, тогда $y''=(yz)'=y'z+z'y=yz^2+yz'$, или $y''=y\left(z^2+z'\right)$, и уравнение запишется $xy^2\left(z^2+z'\right)-xy^2z^2-y^2z^2=0$.

Сокращая на y^2 (при этом теряется решение *y=0*), находим $xz'-z=0$ или $\frac{dz}{z}-\frac{dx}{x}=0$, $z=c_1x$. Так как $z=\frac{y'}{y}$, то $y'=c_1xy$, $\frac{dy}{y}=c_1xdx$.

Откуда $\ln|y|=\frac{c_1x^2}{2}+\ln|c_2|$ или $y=c_2e^{c_1\frac{x^2}{2}}$ – общее решение уравнения (содержит потерянное частное решение *y=0*, если $c_2=0$).

3.5. Уравнения вида

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad \textbf{(12-A)}$$

обобщенно – однородное, если существуют числа *k* и *m* такие, что:

$$F(\lambda x, \lambda^k y, \lambda^{k-1} y', ..., \lambda^{k-n} y^{(n)}) = \lambda^m F(x, y, y', ..., y^{(n)}).$$

С помощью замены $x = e^t$, $y = ze^{kt}$ (при $x>0$, а при $x<0$ полагаем $x = -e^t$), где t – новая независимая переменная, $z = z(t)$ – новая искомая функция.

Уравнение (12-А) приводится к уравнению, не содержащему независимой переменной t и, следовательно, допускающему понижение порядка на единицу.

Производные при замене преобразуются по формулам:

$$y' = \frac{dy}{dt}e^{-t} = \left(\frac{dz}{dt}e^{kt} + kze^{kt}\right)e^{-t} = (z' + kz)e^{(k-1)t},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt}e^{-t} = \left(\frac{d^2z}{dt^2} + (2k-1)\frac{dz}{dt} + k(k-1)z\right)e^{(k-2)t} \text{ и т.д.}$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $x^4 y'' + (xy' - y)^3 = 0$.

Решение. Положим $F(x, y, y', y'') = x^4 y'' + (xy' - y)^3$.

Имеем

$$F(\lambda x, \lambda^k y, \lambda^{k-1} y', \lambda^{k-2} y'') = \lambda^4 \lambda^{k-2} x^4 y'' + (\lambda x \lambda^{k-1} y' - \lambda^k y)^3 = \lambda^{k+2} x^4 y'' + \lambda^{3k}(xy' - y)^3 =$$
$$= \lambda^3 F(x, y, y', y'') \quad (k=1),$$

откуда следует, что данное уравнение является обобщенно – однородным ($m=3$, $k=1$).

Выполним замену $x = e^t$, $y = ze^t$. Тогда

$$y' = z' + z, \quad y'' = (z'' + z)e^{-t}.$$

Отсюда

$$e^{4t}(z'' + z)e^{-t} + \left[e^t(z' + z) - ze^t\right]^3 = 0, \quad z'' + z' + z'^3 = 0.$$

Полученное уравнение явно не содержит независимой переменной *t*.

Пусть $z' = p(z)$, ($z'' = p\frac{dp}{dz}$). Тогда

$$p\frac{dp}{dz} + p + p^3 = 0, \quad p\left(\frac{dp}{dz} + 1 + p^2\right) = 0,$$

откуда имеем два уравнения $\frac{dp}{dz} + 1 + p^2 = 0$ и $p = 0$.

Из второго уравнения $p=0$ следует $z'=0$, $z=c$ или $y=cx$.
Из первого уравнения:

$$\frac{dp}{1+p^2}=-dz\text{ , arctg } p=c_1-z\text{ , } p=tg(c_1-z).$$

Поэтому

$$z'=tg(c_1-z),\ ctg(c_1-z)dz=dt\text{ ,}$$

$$\int ctg(c_1-z)dz=t-\ln c\ \ (c>0),$$

$$\ln|\sin(z-c_1)|=-t+\ln c\text{ ,}$$

$$\sin(z-c_1)=c_2e^{-t}\ \ (c_2\neq 0),\ z=c_1+\arcsin c_2e^{-t}\text{ .}$$

Учитывая замену $y=zx$, $e^{-t}=\frac{1}{x}$, находим $y=x\left(c_1+\arcsin\frac{c_2}{x}\right)$.

Если $c_1=c$, $c_2=0$, то имеем рассмотренное выше решение $y=cx$.

Замечание 1. В некоторых случаях найти решение дифференциального уравнения методом понижения порядка в виде явной или неявной функции затруднительно, однако удается получить решение в параметрической форме.

Пример 6 (к замечанию 1). Найти общее решение уравнения

$$y''(1+2\ln y')=1\text{.}$$

Решение. Пусть $y'=t$, $y''=\frac{dt}{dx}$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{dt}{dx}(1+2\ln t)=1\text{, или } dx=(1+2\ln t)dt\text{ ,}$$

откуда $x=-t+2t\ln t+c_1$. Так как $dy=tdx$, то $dy=t(1+2\ln t)dt$,
откуда $y=t^2\ln t+c_2$.

Общее решение запишется в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=t(-1+2\ln t)+c_1 \\ y=t^2\ln t+c_2. \end{cases}$$

§4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнения вида

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x). \qquad (13)$$

Здесь функции $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ заданы и непрерывны на интервале (a,b).

Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (13) называется линейным **однородным**,

если $f(x)\neq 0$, то уравнение (13) называется линейным **неоднородным**, или линейным уравнением с правой частью.

Краткая запись линейного неоднородного уравнения (13) имеет вид $L(y)=f(x)$, где L – линейный дифференциальный оператор n-го порядка, т.е.

$$L(y)=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y,$$

определенный на множестве n раз непрерывно дифференцируемых на (a,b) функций.

Краткая запись линейного однородного уравнения соответственно имеет вид $L(y)=0$.

4.1. Решение линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений n-го порядка методом понижения порядка уравнения.

Зная одно частное решение $y_1(x)$ линейного однородного уравнения, можно с помощью замены искомой функции $y(x)=y_1(x)\int z(x)dx$ понизить его порядок, а следовательно, и порядок соответствующего неоднородного уравнения (13) на единицу. Полученное уравнение (n-1)-го порядка относительно z также является линейным.

<u>Пример 1</u>. Дано уравнение $y'''+\frac{2}{x}y''-y'+\frac{1}{x\ln x}y=x$ и известно частное решение $y_1=\ln x$ соответствующего однородного уравнения: $y'''+\frac{2}{x}y''-y'+\frac{1}{x\ln x}y=0$.

Понизить порядок уравнения.

Решение. Выполним замену $y=\ln x\int zdx$, где z – новая неизвестная функция. Тогда, подставляя соответствующие производные $y'=\frac{1}{x}\int zdx+z\ln x$,

$y''=-\frac{1}{x^2}\int zdx+\frac{2z}{x}+z'\ln x$, $y'''=\frac{2}{x^3}\int zdx-\frac{3z}{x^2}+\frac{3z'}{x}+z''\ln x$ в данное уравнение, получим:

$$z''\ln x+\frac{3+2\ln x}{x}z'+\left(\frac{1}{x^2}-\ln x\right)z=x.$$

Порядок линейного неоднородного уравнения понижен на единицу.

__**Пример 2**__. Найти общее решение уравнения $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$, если известно его частное решение $y_1=\frac{\sin x}{x}$.

Решение. Выполним замену $y=\frac{\sin x}{x}\int zdx$, тогда

$$y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\int zdx+\frac{\sin x}{x}z,$$

$$y''=\frac{\sin x}{x}z'+\frac{2(x\cos x-\sin x)}{x^2}z-\frac{(x^2-2)\sin x+2x\cos x}{x^3}\int zdx.$$

Имеем уравнение $z'\sin x+2z\cos x=0$, решая которое найдем функцию $z=\frac{c_1}{\sin^2 x}$.

Следовательно, $y=\frac{\sin x}{x}\int\frac{c_1dx}{\sin^2 x}=\frac{\sin x}{x}(c_2-c_1\operatorname{ctg}x)=c_2\frac{\sin x}{x}-c_1\frac{\cos x}{x}$.

Общее решение уравнения: $y=c_2\frac{\sin x}{x}-c_1\frac{\cos x}{x}$.

§5. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Линейное однородное уравнение n-го порядка имеет вид

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \qquad (14)$$

или $L(y)=0$.

Общее решение линейного однородного уравнения (14) записывается

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x),$$

где $c_1,c_2,\ldots,c_n$ – произвольные постоянные, а $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ – фундаментальная система частных решений уравнения (14).

Для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$$

общее решение имеет вид:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два линейно независимых решения (фундаментальная система).

Если для такого уравнения известно одно частное решение $y_1(x)$, то второе его частное решение $y_2(x)$ линейно независимое с первым, можно найти по формуле, являющейся следствием формулы Лиувилля – Остроградского

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx .$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$$

и называется формулой Абеля.

<u>Пример 1</u>. Найти общее решение уравнения $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Решение. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это уравнение имеет частное решение $y_1 = x$. Найдем общее решение с помощью формулы Абеля, заметив, что $a_1(x) = \dfrac{-2x}{1 - x^2}$.

$$y_2 = x\int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2} dx = x\int \frac{e^{-\ln\left|1-x^2\right|}}{x^2} dx = x\int \frac{dx}{x^2\left|1-x^2\right|} = x\int\left(\pm\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right)dx =$$

$$x\left[\pm\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right].$$

Общее решение имеет вид: $y = c_1 x + c_2\left(\dfrac{1}{2}x\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| \pm 1\right)$.

§6. ЛИНЕЙНОЕ ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейным однородным уравнением *n*-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнения вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{15}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторые действительные числа.

Для нахождения частных решений составляют **характеристическое** уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0, \tag{16}$$

которое получается из уравнения (15), если искать частные решения этого уравнения в виде $y = e^{kx}$ (метод подбора решений).

Уравнение (16) является уравнением *n*-й степени и имеет *n* корней действительных или комплексных, среди которых могут быть и равные.

Частные решения уравнения (15) зависят от вида корней характеристического уравнения (16), и при их нахождении полезно использовать следующую табл. 1.

Таблица 1

Характер корня характеристического уравнения (16)	Частные решения уравнения (15)
1) k – простой вещественный корень	e^{kx}
2) k – вещественный корень кратности r	$e^{kx}, xe^{kx}, x^2 e^{kx}, \ldots, x^{r-1} e^{kx}$
3) $\alpha \pm \beta i$ – комплексно сопряженные корни	$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$
4) $\alpha \pm \beta i$ – комплексно сопряженные корни кратности r	$e^{\alpha x} \cos \beta x,$ $xe^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, x^{(r-1)} e^{\alpha x} \cos \beta x$ $e^{\alpha x} \sin \beta x,$ $xe^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, x^{(r-1)} e^{\alpha x} \sin \beta x$

Общее решение уравнения (15) записывается

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_{n-1} y_{n-1} + c_n y_n,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – n частных линейно независимых решений, образующих фундаментальную систему, а $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные.

<u>Пример 1</u>. Найти общее решение уравнения $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.

Решение. Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни.

$k^3 - k^2 + 4k - 4 = 0$, $k^2(k-1) + 4(k-1) = 0$, $(k^2+4)(k-1) = 0$, $k_1 = 1$, $k_{2,3} = \pm 2i$.

Все корни простые, следовательно, согласно табл. 1 соответствующие частные решения запишутся: $y_1 = e^x, y_2 = \cos 2x, y_3 = \sin 2x$.

Общее решение имеет вид: $y = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 3x$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y^{\mathrm{V}}+9y'''=0$.

Решение. Напишем характеристическое уравнение $k^5+9k^3=0$, где $k_1=0$ корень кратности $r=3$, $k_{2,3}=\pm 3i$.

Частные решения: $y_1=e^{0x}=1$, $y_2=x$, $y_3=x^2$, $y_4=\cos 3x$, $y_5=\sin 3x$.

Общее решение: $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4\cos 3x+c_5\sin 3x$.

Пример 3. Найти частное решение уравнения $y'''-3y''+3y'-y=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1, y'(0)=2, y''(0)=3$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3-3k^2+3k-1=0$ имеет единственный корень *k=1* кратности *r=3,* поэтому частные решения запишутся $y_1=e^x, y_2=xe^x, y_3=x^2e^x$. Следовательно, $y=\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)e^x$ – общее решение уравнения.

Для определения произвольных постоянных найдем производные

$$y'=\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)e^x+\left(c_2+2c_3x\right)e^x, \quad y''=\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)e^x+2\left(c_2+2c_3x\right)e^x+2c_3e^x.$$

Подставляя начальные условия, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1=1 \\ c_1+c_2=2 \\ c_1+c_2+2c_3=3. \end{cases}$$

Откуда $c_1=1, c_2=1, c_3=0$. Следовательно искомое частное решение имеет вид

$$y=(1+x)e^x.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y^{\mathrm{VI}}-4y^{\mathrm{V}}+8^{\mathrm{IV}}-8y^{\mathrm{III}}+4y^{\mathrm{II}}=0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$k^6-4k^5+8k^4-8k^3+4k^2=0$$

и найдем его корни.

Имеем $k^2\left(k^4-4k^3+8k^2-8k+4\right)=0$, $k^2\left(k^4+4k^2+4-4k^3+4k^2-8k\right)=0$, $k^2\left(k^2-2k+2\right)^2=0$.

Откуда $k_1=k_2=0, k_3=k_4=1+i, k_5=k_6=1-i$.

Частные решение имеют вид: $1,\ x,\ e^x\cos x,\ e^x\sin x,\ xe^x\cos x,\ xe^x\sin x$.

Общее решение запишется: $y=c_1+c_2x+e^x\left(c_3\cos x+c_4\sin x+c_5x\cos x+c_6x\sin x\right)$.

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y^{\mathrm{V}}+2y=0$.

Решение. Корни характеристического уравнения $k^5+2=0$ находим по формуле

$$k=\sqrt[5]{-2}=\sqrt[5]{2(\cos\pi+i\sin\pi)}=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{5}\right),$$

при $k=0,1,2,3,4$ имеем:

$$k_1 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right),\ k_2 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right),\ k_3 = \sqrt[5]{2}(\cos\pi + i\sin\pi),$$

$$k_4 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{5} - i\sin\frac{3\pi}{5}\right),\ k_5 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right),$$

$$k_1 = \sqrt[5]{2}\,,\ k_{2,3} = \sqrt[2]{5}\left(\cos\frac{\pi}{5} \pm i\sin\frac{\pi}{5}\right),\ k_{4,5} = \sqrt[2]{5}\left(\cos\frac{3\pi}{5} \pm i\sin\frac{3\pi}{5}\right).$$

Частные решения запишутся:

$$y_1 = e^{-\sqrt[5]{2}x},\quad y_2 = e^{\sqrt[5]{2}x\cos\frac{\pi}{5}}\cos\left(\sqrt[5]{2}\sin\frac{\pi}{5}\right)x,\quad y_3 = e^{\sqrt[5]{2}x\cos\frac{\pi}{5}}\sin\left(\sqrt[5]{2}\sin\frac{\pi}{5}\right)x,$$

$$y_4 = e^{\sqrt[5]{2}x\cos\frac{3\pi}{5}}\cos\left(\sqrt[5]{2}\sin\frac{3\pi}{5}\right)x,\quad y_5 = e^{\sqrt[5]{2}x\cos\frac{3\pi}{5}}\sin\left(\sqrt[5]{2}\sin\frac{3\pi}{5}\right)x.$$

Общее решение:

$$y_1 = c_1 e^{-\sqrt[5]{2}x} + e^{\sqrt[5]{2}x\cos\frac{\pi}{5}}\left[c_2\cos\left(\sqrt[5]{2}\sin\frac{\pi}{5}\right)x + c_3\sin\left(\sqrt[5]{2}\sin\frac{\pi}{5}\right)x\right] +$$

$$+ e^{\sqrt[5]{2}x\cos\frac{3\pi}{5}}\left[c_4\cos\left(\sqrt[5]{2}\sin\frac{3\pi}{5}\right)x + c_5\sin\left(\sqrt[5]{2}\sin\frac{3\pi}{5}\right)x\right].$$

§7. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Структура общего решения линейного неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \tag{17}$$

где $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ переменные или постоянные коэффициенты, имеет вид:

$y = \bar{y} + y^*$.

Здесь $\bar{y}$ – общее решение линейного однородного уравнения $L(y) = 0$, соответствующего данному уравнению, а y^* – произвольное частное решение неоднородного уравнения $L(y) = f(x)$.

Методы нахождения $\bar{y}$ рассмотрены в §6.

Рассмотрим общий метод нахождения произвольного частного решения y^* методом Лагранжа.

7.1. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Линейное уравнение с постоянными или переменными коэффициентами и с любой правой частью $f(x)$ можно решить методом вариации произвольных постоянных, если известно общее решение линейного однородного уравнения $\bar{y}$.

Пусть известна фундаментальная система решений $y_1, y_2, ..., y_n$ соответствующего однородного уравнения, его общее решение имеет вид

$$\overline{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n .$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y^* = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + ... + c_n(x)y_n ,$$

где $c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)$ – неизвестные функции, которые определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + ... + c_n'(x)y_n = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + ... + c_n'(x)y_n' = 0 \\ \text{..} \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)} + c_2'(x)y_2^{(n-2)} + ... + c_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + ... + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x), \end{cases} \qquad (*)$$

где $f(x)$ – правая часть уравнения.

<u>Пример 1</u>. Найти общее решение уравнения $y'' - \frac{y'}{x} = x$.

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения $y'' - \frac{y'}{x} = 0$.

Так как $\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$, то $\ln y' = \ln|x| + \ln c_1$, $y' = c_1 x$, $y = c_1 x^2 + c_2$ или $\overline{y} = c_1 x^2 + c_2$ – общее решение.

Запишем $y^* = c_1(x)x^2 + c_2(x)$ – частное решение данного уравнения. Составим систему уравнений (*) для нахождения $c_1(x)$ и $c_2(x)$:

$$\begin{cases} c_1'(x)x^2 + c_2'(x)1 = 0 \\ 2c_1'(x)x + c_2'(x)0 = x \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c_1'x^2 + c_2' = 0 \\ 2c_1'x = x. \end{cases}$$

Решая систему, находим $c_1' = \frac{1}{2}$, $c_2' = -\frac{1}{2}x^2$, откуда в результате интегрирования получим:

$c_1(x) = \int c_1'(x)dx = \int \frac{1}{2}dx = \frac{x}{2} + \overline{c_1}$ (будем считать $\overline{c_1} = 0$ т.к. находим частное решение),

$c_2(x) = \int c_2'(x)dx = -\int \frac{1}{2}x^2 dx = -\frac{x^3}{6} + \overline{c_2}$ (будем считать $\overline{c_2} = 0$).

Частное решение запишется $y^* = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 = \frac{x}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}1$ или $y^* = \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{3}$.

Общее решение данного уравнения: $y = \overline{y} + y^*$, т.е. $y = c_1 x^2 + c_2 + \frac{x^3}{3}$.

<u>Пример 2</u>. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''-y'=\frac{1}{1+e^x},$$

удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=2$.

Решение. Общее решение данного уравнения запишется $y=\overline{y}+y^*$. Найдем $\overline{y}$ – общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y''-y'=0$. Корни его характеристического уравнения $k^2-k=0$ вещественные разные $k_1=0, k_2=1$, тогда $\overline{y}=\overline{c}_1+c_2e^x$. Запишем $y^*=c_1(x)+c_2(x)e^x$.

Составим систему (*) для нахождения $c_1(x)$ и $c_2(x)$

$$\begin{cases} c_1'(x)1+c_2'(x)e^x=0 \\ c_1'(x)0+c_2'(x)e^x=\dfrac{1}{1+e^x} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c_1'+c_2'e^x=0 \\ c_2'e^x=\dfrac{1}{1+e^x} \end{cases},$$

откуда получаем $c_1'(x)=-\dfrac{1}{1+e^x}$, $c_2'(x)=\dfrac{1}{e^x(1+e^x)}$.

Следовательно,

$$c_1(x)=-\int\frac{dx}{1+e^x}=-x+\ln(1+e^x),$$

$$c_2(x)=\int\frac{dx}{e^x(1+e^x)}=-e^x-x+\ln(1+e^x).$$

Запишем $y^*=-x+\ln(1+e^x)+e^x\left[-e^{-x}-x+\ln(1+e^x)\right]$.

Общее решение: $y=\overline{c}_1+c_2e^x-x+\ln(1+e^x)-1-xe^x+e^x\ln(1+e^x)$ или

$y=c_1+e^x(c_2-x)-x+(1+e^x)\ln(1+e^x)$ ($c_1=\overline{c}_1-1$).

Для определения частного решения найдем производную

$y'=-1+e^x\left[c_2-x+\ln(1+e^x)\right]$.

Подставляя значения $x=0,\ y=1,\ y'=2$ в выражение

$$y=c_1+e^x(c_2-x)-x+(1+e^x)\ln(1+e^x) \text{ и } y'=-1+e^x\left[c_2-x+\ln(1+e^x)\right],$$

получим систему

$$\begin{cases} 1=c_1+c_2+2\ln 2 \\ 2=-1+c_2+\ln 2. \end{cases}$$

Откуда $c_1=-2-\ln 2,\ c_2=3-\ln 2.$ Искомое частное решение запишется:

$$y=-x+e^x(3-\ln 2-x)+(1+e^x)\ln(1+e^x)-2-\ln 2.$$

<u>Пример 3</u>. Найти общее решение уравнения

$$y'''-\frac{3}{x}y''+\frac{6}{x^2}y'-\frac{6}{x^3}y=\sqrt{x}.$$

Решение. Структура общего решения имеет вид $y=\overline{y}+y^*$.

Найдем $\overline{y}$ - общее решение уравнения $y'''-\dfrac{3}{x}y''+\dfrac{6}{x^2}y'-\dfrac{6}{x^3}y=0$.

Решение будем искать в виде многочлена $y = ax^n$ методом подбора. Непосредственной проверкой убедимся, что многочлены $y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ y_3 = x^3$ являются решениями уравнения и образуют фундаментальную систему решений. Тогда $\bar{y} = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$.

Методом Лагранжа найдем частное решение $y*$ данного уравнения, т.е.

$$y* = c_1(x)x + c_2(x)x^2 + c_3(x)x^3 .$$

Составим систему (*) для определения $c_1(x),\ c_2(x),\ c_3(x)$:

$$\begin{cases} c_1'(x)x + c_2'(x)x^2 + c_3'(x)x^3 = 0 \\ c_1'(x)1 + c_2'(x)2x + c_3'(x)3x^2 = 0 \\ c_2'(x)2 + c_3'(x)6x = \sqrt{x} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c_1'x + c_2'x^2 + c_3'x^3 = 0 \\ c_1' + 2c_2'x + 3c_3'x^2 = 0 \\ 2c_2' + 6c_3'x = \sqrt{x}. \end{cases}$$

Решая систему, получим $c_1'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^3},\ c_2'(x) = -\sqrt{x},\ c_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, откуда

$$c_1(x) = \frac{1}{5}\sqrt{x^5},\ c_2(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{x^3},\ c_3(x) = \sqrt{x} .$$

Частное решение запишется $y* = \frac{1}{5}\sqrt{x^5}x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}x^2 + \sqrt{x}x^3 = \frac{8}{15}\sqrt{x^7}$.

Следовательно, общее решение имеет вид: $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \frac{8}{15}\sqrt{x^7}$.

§8. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, т.е. уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \tag{17}$$

где $a_i\ \ (i = 1,2,\ldots,n)$ - действительные числа, а $f(x) \neq 0$.

Общее решение уравнения (17) записывается в виде $y = \bar{y} + y*$, где $\bar{y}$ – общее решение $L(y) = 0$. соответствующего данному, $y*$ – любое частное решение уравнения $L(y) = f(x)$.

Общее решение $\bar{y}$ находится с помощью табл. 1.

Для отыскания $y*$ в общем случае можно воспользоваться методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.

В частных случаях, когда функция $f(x)$ в уравнении (17) имеет специальный вид, частное решение находится методом неопределенных коэффициентов (метод подбора частного решения). При этом используют табл. 2.

Таблица 2

Вид правой части уравнения (17)	Корни характеристического уравнения $L(y)=0$.	Вид частного решения уравнения (17)
$f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)$	1) α – не является корнем характеристического уравнения 2) α – корень характеристического уравнения кратности r	1) $y^*=e^{\alpha x}Q_m(x)$ 2) $y^* = x^r e^{\alpha x} Q_m(x)$
$f(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$	1) $\pm\beta i$ – не является корнем характеристического уравнения 2) $\pm\beta i$ – корень характеристического уравнения кратности r	1) $y^*=M\cos\beta x+N\sin\beta x$ 2) $y^*=x^r(M\cos\beta x+N\sin\beta x)$
$f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+$ $+P_n(x)\sin\beta x]$	1) $\alpha\pm\beta i$ – не является корнем характеристического уравнения 2) $\alpha\pm\beta i$ – корень характеристического уравнения кратности r	1) $y^*=e^{\alpha x}[M_k(x)\cos\beta x+N_k(x)\sin\beta x]$ 2) $y^*=x^r e^{\alpha x}[M_k(x)\cos\beta x+N_k(x)\sin\beta x]$

Замечание 1 (к табл. 2). $M_k(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_kx^k$, $N_k(x)=B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots+B_kx^k$, где k – наибольшее из чисел m и n.

Замечание 2. Если $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, то $y^*=y_1^*+y_2^*$, где y_1^* соответствует $f_1(x)$, а y_2^* - $f_2(x)$.

Замечание 3. Многочлены $Q_m(x)$ должны быть полными (т.е. содержать все степени *x*, от 0 до *m*). Если в выражение функции $f(x)$ входит хотя бы одна из функций $\cos\beta x$ или $\sin\beta x$, то в y^* нужно всегда вводить обе функции.

Пример 1. Записать вид частного решения уравнения $y'''-y''=f(x)$, если а) $f(x)=2$; б) $f(x)=3x^2-2x+5$; в) $f(x)=2e^{-3x}$; г) $f(x)=2xe^x$; д) $f(x)=3\sin 2x$; е) $f(x)=3\sin x+5\cos 2x$ ж) $f(x)=\sin 2x+5x\cos 2x$

Решение. Характеристическое уравнение запишется $k^3-k^2=0$, имеем корни $k_{1,2}=0,\ k_3=1$.

Запишем частные решения уравнения в общем виде (не находя коэффициентов):
а) $y^* = Ax^2$; б) $y^* = x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right)$; в) $y^* = Ae^{-3x}$; г) $y^* = x(Ax + B)e^x$;
д) $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$; е) $y^* = y_1{}^* + y_2{}^* = A\cos x + B\sin x + C\cos 2x + D\sin 2x$;
ж) $y^* = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y^{\mathrm{IV}} + y'' = x^2 + x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^4 + k^2 = 0$, его корни $k_{1,2} = 0,\ k_{3,4} = \pm i$.
Общее решение соответствующего однородного уравнения запишется

$$\bar{y} = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

Частное решение имеет вид $y^* = x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$.

Для определения неизвестных коэффициентов A, B, C вычислим производные от y^*: $y^{*\prime} = 2Cx + 3Bx^2 + 4Ax^3$, $y^{*\prime\prime} = 2C + 6Bx + 12Ax^2$, $y^{*\prime\prime\prime} = 6B + 24Ax$, $y^{*\mathrm{IV}} = 24A$
и подставим в уравнение $y^{\mathrm{IV}} + y'' = x^2 + x$. Из полученного тождества

$$24A + 2C + 6Bx + 12Ax^2 \equiv x^2 + x$$

определим коэффициенты A, B, C двумя методами:
1) уравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{cases} 12A = 1 \\ 6B = 1 \\ 24A + 2C = 0, \end{cases}$$

откуда $A = \dfrac{1}{12},\ B = \dfrac{1}{6},\ C = -1.$

2) зададим x произвольные значения.
Пусть $x = 0 \quad \Rightarrow \quad 24A + 2C = 0$,
$x = -1 \quad \Rightarrow \quad 24A + 2C - 6B + 12A = 0,$
$x = 1 \quad \Rightarrow \quad 24A + 2C + 6B + 12A = 2.$

Решая полученную систему, найдем $A = \dfrac{1}{12},\quad B = \dfrac{1}{6},\quad C = -1$. При определении коэффициентов используется или первый или второй метод, а иногда уместно применить одновременно оба.

Частное решение запишется $y^* = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{1}{6}x^3 - x^2$. Следовательно,
$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{x^4}{12}$ есть общее решение уравнения.

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x)$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y\big|_{x=0} = 1, \quad y'\big|_{x=0} = 0, \quad y''\big|_{x=0} = -1.$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни: $k^3 - 2k^2 + k = 0, \ \ k_1 = 0, \ \ k_2 = k_3 = 1.$ Общее решение однородного уравнения имеет вид $\bar{y} = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^x$. Запишем частное решение $y^* = A\cos x + B\sin x.$ Вычислим производные:

$(y^*)' = -A\sin x + B\cos x$, $(y^*)'' = -A\cos x - B\sin x$, $(y^*)''' = A\sin x - B\cos x;$

после подстановки y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$, $(y^*)'''$ в левую часть данного уравнения получим $2A\cos x + 2B\sin x \equiv 4\cos x + 4\sin x$ – тождество, из которого $A = 2, \ B = 2; \ y^* = 2\cos x + 2\sin x$ - частное решение. Общее решение неоднородного уравнения $y = \bar{y} + y^*$ или $y = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^x + 2\cos x + 2\sin x.$

Найдем частное решение, соответствующее заданным начальным условиям. Продифференцируем последовательно два раза общее решение и получим три равенства:

$$y = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^x + 2\cos x + 2\sin x,$$
$$y' = [C_2 + C_3(1 + x)]e^x + 2(-\sin x + \cos x),$$
$$y'' = [C_2 + C_3(2 + x)]e^x - 2(\cos x + \sin x).$$

Подставляя начальные условия $x = 0, \ y = 1, \ y' = 0, \ y'' = -1$ в эти равенства получим, систему уравнений с неизвестными C_1, C_2, C_3.

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + 2 \\ 0 = C_2 + C_3 + 2 \\ -1 = C_2 + 2C_3 - 2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 4, \ C_2 = -5, \ C_3 = 3.$ Следовательно, $y = 4 + (-5 + 3x)e^x + 2(\cos x + \sin x)$ – искомое частное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

§ 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СВОДЯЩИЕСЯ К ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

9.1. Уравнение Эйлера

Уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \tag{18}$$

где $a_i = const \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$. Заменой $x = e^t$ (или $x = -e^t$ при $x < 0$) уравнение сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. На практике решение уравнения Эйлера ищут в виде $y = e^{rt} = (e^t)^r = x^r$. Для нахождения r получают характеристическое уравнение. Простому корню r_1 соответствует решение x^{r_1}, а m-кратному корню r_1 – m линейно независимых решений вида x^{r_1}, $x^{r_1}\ln x$, $x^{r_1}(\ln x)^2, \ldots, x^{r_1}(\ln x)^{m-1}$. Если коэффициенты уравнения действительны, а характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни $r_0 = \alpha_0 \pm i\beta_0$ кратности μ, то уравнение Эйлера имеет 2μ линейно независимых решений вида

$$x^{\alpha_0}\cos(\beta_0 \ln x),\quad x^{\alpha_0}\ln x\cos(\beta_0 \ln x),\ \ldots,\quad x^{\alpha_0}(\ln x)^{\mu-1}\cos(\beta_0 \ln x),$$
$$x^{\alpha_0}\sin(\beta_0 \ln x),\quad x^{\alpha_0}\ln x\sin(\beta_0 \ln x),\ \ldots,\quad x^{\alpha_0}(\ln x)^{\mu-1}\sin(\beta_0 \ln x).$$

9.2. Уравнение Лагранжа

Уравнение вида

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = 0, \quad \ldots \tag{19}$$

где $a,\ b,\ a_i = const \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$. Заменой $ax + b = e^t$ уравнение Лагранжа сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

9.3. Уравнение Чебышева

Уравнение вида

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \tag{20}$$

где $n = const.$. Заменой $x = \cos t$ (при $|x|<1$) уравнение Чебышева сводится к уравнению $\dfrac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0.$

9.4. Линейное однородное уравнение второго порядка

Уравнение вида

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{21}$$

с помощью замены $y = u \cdot e^{-\frac{1}{2}\int a_1(x)dx}$ сводится к уравнению $u'' + Q(x)u = 0,$ где $Q(x) = a_2(x) - \dfrac{1}{4}a_1^2(x) - \dfrac{1}{2}a_1'(x).$ Последнее является уравнением с постоянными коэффициентами или уравнением Лагранжа, если $Q(x) = c$ или $Q(x) = \dfrac{c}{(ax+b)^2},\quad (a, b, c = const)$ соответственно.

Пример 1. Найти общее решение уравнения Эйлера $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0.$

Решение. Будем искать решение уравнения Эйлера в виде $y = x^r$, тогда получим: $x^2 r(r-1)x^{r-2} + 5xrx^{r-1} + 4x^r = 0, \quad r(r-1) + 5r + 4 = 0, \quad r^2 + 4r + 4 = 0,$ $r_1 = r_2 = -2$ - двукратный корень характеристического уравнения. Поэтому общее решение имеет вид: $y = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-2} \ln x.$

Пример 2. Найти общее решение уравнения Чебышева

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0 \quad (|x| < 1).$$

Решение. Выполним замену $x = \cos t \ (t \in (0, \pi)),$ тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\right),$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\right)\right)\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\left(-\frac{1}{\sin t}\right) + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t}\right) \times$$

$$\times \left(-\frac{1}{\sin t}\right) = \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 t} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\cos t}{\sin^3 t},$$

получим $\quad \dfrac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 0, \quad$ откуда $\quad y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t = C_1 \cos(2 \arccos x) +$ $+ C_2 \sin(2 \arcsin x) = C_1 (2x^2 - 1) + 2C_2 x\sqrt{1 - x^2}.$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + 2xy' + (x^2 + 6)y = 0.$

Решение. Имеем уравнение вида (21). Найдем $Q(x)$:

$$Q(x) = a_2(x) - \frac{1}{4}a_1^2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) = x^2 + 6 - \frac{1}{4} \cdot 4x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 5.$$

Заменой $\quad y = u \cdot \exp\left(-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int 2x dx\right) \quad$ данное уравнение сводится к уравнению $u'' + 5u = 0.$

Составим характеристическое уравнение $k^2 + 5 = 0, \ k_{1,2} = \pm\sqrt{5}i.$ Общее решение запишется $y = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (C_1 \cos\sqrt{5}x + C_2 \sin\sqrt{5}x).$

§10. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

В некоторых случаях, когда интегрирование дифференциального уравнения в элементарных функциях невозможно, решение такого уравнения ищут в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n. \tag{22}$$

Неопределенные коэффициенты c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ находят подстановкой ряда в дифференциальное уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях разности $(x - x_0)$ в обеих частях полученного равенства. Если удается найти все коэффициенты ряда, то полученный ряд определяет решение во всей своей области сходимости.

В тех случаях, когда для уравнения $y' = f(x, y)$ требуется решить задачу Коши при начальных условиях $y|_{x=x_0} = y_0$, решение можно искать с помощью ряда Тейлора: $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{y^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$, где $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а дальнейшие производные $y^{(n)}(x_0)$ находим последовательным дифференцированием исходного уравнения и подстановкой вместо $x,\ y,\ y', \ldots$ значений $x_0,\ y_0,\ y'_0, \ldots$.

Аналогично с помощью ряда Тейлора можно интегрировать и уравнения высших порядков.

__Пример 1__. Найти общее решение уравнения $y'' - x^2 y = 0.$

Решение. Будем искать решение этого уравнения в виде ряда $y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots$.

Подставляя y и y'' в исходное уравнение, находим

$$\left[2\cdot 1 C_2 + 3\cdot 2 C_3 x + 4\cdot 3 C_4 x^2 + \ldots + (n+2)(n+1)C_{n+1}x^n + \ldots\right] -$$
$$- x^2\left[C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots\right] \equiv 0.$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями x:

$$2\cdot 1 C_2 + 3\cdot 2 C_3 x^2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+4)(n+3)C_{n+4} - C_n\right]x^{n+2} \equiv 0.$$

Приравнивая к нулю все коэффициенты полученного ряда (чтобы уравнение обратилось в тождество), находим $C_2 = C_3 = 0;$ $C_{n+4} = \dfrac{C_n}{(n+3)(n+4)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Последнее соотношение позволяет найти последовательно все коэффициенты искомого разложения (C_0 и C_1 остаются произвольными и считаются произвольными постоянными интегрирования):

$$C_{4k} = \frac{C_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot \ldots \cdot (4k-1)\cdot 4k}; \quad C_{4k+1} = \frac{C_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot \ldots \cdot 4k(4k+1)};$$
$$C_{4k+2} = C_{4k+3} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, $y = C_0 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{4k}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot \ldots \cdot (4k-1)4k} + C_1 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{4k+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot \ldots \cdot 4k(4k+1)}.$

Полученные ряды сходятся на всей числовой оси и определяют два линейно независимых частных решения исходного уравнения.

<u>Пример 2</u>. Проинтегрировать приближенно с помощью ряда Тейлора уравнение $y''=x+y^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Найти четыре первых (отличных от нуля) члена разложения.

Решение. Дифференцируя уравнение $y''=x+y^2$, имеем

$y'''=1+2yy'$, $\quad y^{(4)}=2yy''+2y'^2$, $\quad y^{(5)}=2yy'''+6y'y''$, $\quad y^{(6)}=2yy^{(4)}+8y'y'''+6y''^2$.

При $x=0$ получаем

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad y''(0)=0,\quad y'''(0)=1,\quad y^{(4)}(0)=2,\quad y^{(5)}(0)=0,\quad y^{(6)}(0)=16.$$

Решение имеет вид $y=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{16x^5}{6!}+\ldots=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{45}+\ldots$.

§11. УРАВНЕНИЕ БЕССЕЛЯ

Уравнением Бесселя называется дифференциальное уравнение вида

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0, \tag{23}$$

где $n=const$.

Решение уравнения определяют в виде произведения некоторой степени x на степенной ряд $y=x^r\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$.

Коэффициент a_0 мы можем считать отличным от нуля ввиду неопределенности показателя x.

Перепишем $y=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^{r+k}$ и найдем производные:

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)a_kx^{r+k-1},\quad y''=\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)(r+k-1)a_kx^{r+k-2}.$$

Подставим эти выражения в уравнение (23):

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)(r+k-1)a_kx^{r+k-2}+x\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)a_kx^{r+k-1}+(x^2-n^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{r+k}=0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при x в степени $r,\ r+1,\ r+2,\ldots,r+k$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\left[r(r-1)+r-n^2\right]a_0=0\\ \left[(r+1)r+(r+1)-n^2\right]a_1=0\\ \left[(r+2)(r+1)+(r+2)-n^2\right]a_2=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left[(r+k)(r+k-1)+(r+k)-n^2\right]a_k+a_{k-2}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases},\ \text{или}\ \begin{cases}(r^2-n^2)a_0=0\\ \left[(r+1)^2-n^2\right]a_1=0\\ \left[(r+2)^2-n^2\right]a_2+a_0=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left[(r+k)^2-n^2\right]a_k+a_{k-2}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}.$$

Рассмотрим равенство $\left[(r+k)^2-n^2\right]a_k+a_{k-2}=0$. Его можно переписать в виде
$[(r+k-n)(r+k+n)]a_k+a_{k-2}=0$.
По условию $a_0\neq 0$, следовательно, $r^2-n^2=0,\quad r_1=n,\quad r_2=-n$.

1. Пусть n не равно целому числу.
Из системы уравнений последовательно определяются все коэффициенты $a_1, a_2, ...;\quad a_0$ остается произвольным.

Пусть *r*=*n*, тогда $a_0=1, a_1=0$ тогда $a_k=-\dfrac{a_{k-2}}{k(2n+k)}$, *k*=(*2,3,…*). Придавая различные значения *k*, найдем

$$\begin{cases} a_1=0,\quad a_3=0\quad \textit{и, вообще}, a_{2m+1}=0 \\ a_2=-\dfrac{1}{2(2n+2)},\quad a_4=\dfrac{1}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)}, \ldots, \\ a_{2m}=(-1)^m\dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2m(2n+2)(2n+4)\ldots(2n+2m)}, \ldots \qquad m=(1,2...) \end{cases}$$

Подставим найденные коэффициенты в решение уравнения $y=x^r\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$, получим частное решение

$$y_1=x^n\left[1-\frac{x^2}{2(2n+2)}+\frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)}-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)}+\ldots\right].$$

Решение y_1, умноженное на некоторую постоянную $a_0=\dfrac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$, называется функцией Бесселя первого рода n-го порядка и обозначается символом $J_n(x)$.
Решение y_2, соответствующее значению $r=-n$, обозначают символом $J_{-n}(x)$ и находят по формулам

$$y_2=x^{-n}\left[1-\frac{x^2}{2(-2n+2)}+\frac{x^4}{2\cdot 4(-2n+2)(-2n+4)}-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(-2n+2)(-2n+4)(-2n+6)}+\ldots\right].$$

Таким образом, при n, не равном целому числу, общее решение уравнения (23) имеет вид: $y=C_1J_n(x)+C_2J_{-n}(x)$.
В выборе a_0 участвует гамма-функция $\Gamma(n+1)$, которая определяется несобственным интегралом

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{n-1}dx\ \ (n>0)\qquad (\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{\pi},\ldots\ .$$

2. Если $n \geq 0$ **есть целое число**, то первое решение y_1 будет иметь смысл и являться первым частным решением уравнения (23), но второе решение не будет иметь смысла, так как один из множителей знаменателя в разложении обратится в нуль.

При целом положительном n функция Бесселя имеет вид $J_n(x) = \dfrac{1}{2^n \cdot n!} y_1$ (а при $n = 0$, y_1 умножается на 1), т. е.

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \ldots\right]$$

или

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} .$$

Можно показать, что второе частное решение в этом случае нужно искать в форме $K_n(x) = J_n(x)\ln x + x^{-n}\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k$.

Подставляя это выражение в уравнение (23), мы определим коэффициенты b_k. Функция $K_n(x)$ с определенными таким образом коэффициентами умноженная на некоторое постоянное, называется <u>функцией Бесселя</u> второго рода n-го порядка. Это и есть решение уравнения (23), образующее с первым линейно независимую систему.

Общее решение будет иметь вид: $Y = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x)$.

Отметим, что $\lim\limits_{x\to\infty} K_n(x) = \infty$ следовательно, если мы хотим рассматривать конечные решения при $n = 0$, то в общем решение нужно положить $C_2 = 0$.

<u>Пример1</u>. Найти функцию Бесселя при n=0

Решение.

$$I_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{4^m (m!)^2}$$

$$I_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4^2(1\cdot 2)^2} - \frac{x^6}{4^3(1\cdot 2\cdot 3)^2} + \cdots \quad .$$

<u>Пример 2</u>. Решить уравнение $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$.

Решение: Так как $n = \dfrac{1}{2}$, то общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1 I_{1/2}(x) + C_2 I_{-1/2}(x),$$

где

$$I_{1/2}(x) = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(\frac{3}{2})} \cdot x^{\frac{1}{2}}[1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad .$$

Точно так же получим: $I_{-\frac{1}{2}}(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

Следовательно, общее решение: $y=(C_1\sin x+C_2\cos x)\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}$.

§12. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Во многих физических задачах приходится искать решение дифференциальных уравнений не по заданным начальным условиям, а по их значениям на концах интервала.

Такие задачи получили название краевых (граничных) задач. Чтобы решить краевую задачу

$$L(y)=a_1(x)y''+a_2(x)y'+a_3(x)y=f(x),\ a\le x\le b,$$

$$\alpha y(a)+\beta y'(a)=0,\ \gamma y(b)+\delta y'(b)=0,$$

нужно найти общее решение данного уравнения и подобрать значения произвольных постоянных, входящих в формулу общего решения так, чтобы удовлетворились краевые условия.

В отличие от задачи Коши краевая задача не всегда разрешима, а если разрешима, то не обязательно единственным образом.

<u>Пример 1</u>. Найти решение уравнения $y''-y'=0$ удовлетворяющие краевым условиям $y(0)=3, y(1)-y'(1)=1$.

Решение. Общее решение данного уравнения имеет вид $y=C_1+C_2e^x$. Подберем C_1 и C_2 так, чтобы удовлетворились заданные краевые условия, т.е. определим постоянные C_1 и C_2 из уравнений:

$$\begin{cases} C_1+C_2=3 \\ C_1+C_2e-C_2e=1. \end{cases}$$

Отсюда $C_1=1$, $C_2=2$.Таким образом, решением краевой задачи является функция $y=1+2e^x$.

<u>Пример 2</u>. Найти частное решение уравнения: $y''-2y'+2y=e^x$, удовлетворяющее краевым условиям $y(0)+y(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}$, $y'(0)+y'(\frac{\pi}{2})=1$.

Решение. Общее решение данного уравнения линейного неоднородного с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x+1).$$

Находим $y'=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x+1)+e^x(-C_1\sin x+C_2\cos x)$ и используем краевые условия. Получим систему уравнений для определения C_1 и C_2:

$$\begin{cases}(C_1+1)+e^{\frac{\pi}{2}}(C_2+1)=e^{\frac{\pi}{2}}\\(C_1+C_2+1)+e^{\frac{\pi}{2}}(-C_1+C_2+1)=1.\end{cases}$$

Решив эту систему, получим $C_1=\dfrac{e^{\pi}-1-e^{\frac{\pi}{2}}}{1+e^{\pi}}$; $C_2=\dfrac{1-2e^{\frac{\pi}{2}}}{1+e^{\pi}}$ т.е. искомым частным решением является функция $y=e^x(\dfrac{e^{\pi}-1-e^{\frac{\pi}{2}}}{1+e^{\pi}}\cos x+\dfrac{1-2e^{\frac{\pi}{2}}}{1+e^{\pi}}\sin x+1)$.

§13. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача1. Если тело медленно погружается в воду, то его скорость v и ускорение w приближенно связаны уравнением $w=q-k\text{v}$, где q и k – постоянные.

Установить зависимость между пройденным путем s и временем t, если при t=0 s=v=0.

Решение. Так как ускорение $w=\dfrac{d^2s}{dt^2}$ и скорость $\text{v}=\dfrac{ds}{dt}$, то зависимость между s и t выражается дифференциальным уравнением второго порядка $\dfrac{d^2s}{dt^2}=q-k\dfrac{ds}{dt}$, не содержащим неизвестной функции S (см. уравнение (9)).

Положив в нем $\dfrac{ds}{dt}=\text{v}$ и $\dfrac{d^2s}{dt^2}=\dfrac{d\text{v}}{dt}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции v(t):

$$\frac{d\text{v}}{dt}=q-k\text{v}\text{, или }\frac{d\text{v}}{q-k\text{v}}=dt\ ,$$

$$-\frac{1}{k}\ln(q-k\text{v})=t+C_1.$$

Определим C_1, учтя, что v(0)=0. $-\dfrac{1}{k}\ln q=C_1$. Подставив найденное значение C_1 в предыдущее равенство и решая его получим:

$$t=\ln(\frac{q}{q-k\text{v}})^{\frac{1}{k}}\text{ или }\frac{q}{q-k\text{v}}=e^{kt},$$

откуда $v=\frac{ds}{dt}=\frac{q}{k}(1-e^{-kt})$. Разделим переменные и проинтегрируем обе части равенства: $S(t)=\frac{q}{k}\int(1-e^{-kt})dt+C_2$ или $S(t)=\frac{q}{k}t+\frac{q}{k^2}e^{-kt}+C_2$.

Из начального условия S(0)=0 определим C_2: $0=\frac{q}{k^2}+C_2$, $C_2=-\frac{q}{k^2}$.

Подставив найденное значение C_2 в предыдущее равенство, получим искомую зависимость: $S(t)=\frac{q}{k}t+\frac{q}{k^2}(e^{-kt}-1)$.

Задача 2. Найти кривую, у которой радиус кривизны равен кубу нормали; искомая кривая должна проходить через точку M(0;1) и иметь в этой точке касательную, составляющую с осью Ox угол 45 градусов.

Решение. Так как радиус кривизны плоской кривой выражается формулой $R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$, а длина нормали $N=\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|$, то дифференциальное уравнение задачи имеет вид:

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=(y\sqrt{1+y'^2})^3.$$

Отсюда, сократив на $(1+y'^2)^{3/2}$,приходим к уравнению: $y''\cdot y^3=1$ (см. уравнение (10)).

Полагая $y'=p;\ y''=p\frac{dp}{dy}$, получим уравнение: $p\frac{dp}{dy}\cdot y^3=1$.

Интегрируя его, находим: $pdp=y^{-3}dy$, $\frac{1}{2}p^2=-\frac{1}{2}y^{-2}+\frac{1}{2}C_1$, $p^2=C_1-y^{-2}$.

Возвращаясь к переменной y, приходим к уравнению: $y'^2=C_1-y^{-2}$.

Произвольную постоянную C_1 найдем из условия, что касательная в точке M(0;1) составляет с осью OX угол 45 градусов, т.е. $tg45^\circ=y'_M=1$ или $y'(0)=1$. Следовательно, $1=C_1-1$, т.е. $C_1=2$. Таким образом, для определения y получено уравнение первого порядка $y'^2=2-y^{-2}$, откуда $y'=\frac{\sqrt{2y^2-1}}{y}$; разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{ydy}{\sqrt{2y^2-1}}=dx;\ \frac{1}{2}\sqrt{2y^2-1}=x+\frac{1}{2}C_2;\quad y^2=\frac{1}{2}\left[(2x+C_2)^2+1\right].$$

Произвольную постоянную C_2 находим из условия прохождения кривой через точку M(0;1), т.е. $1=\frac{1}{2}\left[(2\cdot 0+C_2)^2+1\right]$ $C_2=1$.

Следовательно, искомая кривая определяется уравнением:

$$y^2=2x^2+2x+1.$$

Задача 3. Материальная точка массы m движется по оси OX под действием восстанавливающей силы, направленной к началу координат и пропорциональной расстоянию движущейся точки от начала; среда, в которой происходит движение, оказывает движению точки сопротивление, пропорциональное скорости движения. Найти закон движения.

Решение. Пусть $\dot{x}$ – скорость точки, $\ddot{x}$ – ее ускорение; на точку действуют две силы: восстанавливающая $F_1=-ax$ и сила сопротивления среды $F_2=-b\dot{x}$. Согласно второму закону Ньютона имеем $m\ddot{x}=-b\dot{x}-ax$, или $m\ddot{x}+b\dot{x}+ax=0$. Имеем линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его характеристическое уравнение $mk^2+bk+a=0$ имеет корни $k_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ma}}{2m}$

1. Если $b^2-4ma>0$, то корни – действительные, различные и оба отрицательные; вводя для них обозначения $k_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ma}}{2m}=-r_1$, $k_2=-\dfrac{b+\sqrt{b^2-4ma}}{2m}=-r_2$, находим общее решение уравнения движения в виде $x=c_1e^{-r_1t}+c_2e^{-r_2t}$ (случай так называемого апериодического движения).

2. Если $b^2-4ma=0$, то корни характеристического уравнения – действительные равные $k_1=k_2=-\dfrac{b}{2m}=-r$. В этом случае общее решение уравнения движения имеет вид

$$x=(C_1+C_2t)e^{-rt}.$$

3. Если $b^2-4ma<0$, характеристическое уравнение имеет комплексные сопряженные корни $k_1=-\alpha+\beta i$, $k_2=-\alpha-\beta i$, где $\alpha=\dfrac{b}{2m}$, $\beta=\dfrac{\sqrt{4am-b^2}}{2m}$. Общее решение уравнений движения имеет вид

$$x=e^{-\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2 sin\beta t),\ \text{или}\ \ x=Ae^{-\alpha t}\sin(\beta t+\varphi_0),$$

где $A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$, $\sin\varphi_0=\dfrac{C_1}{A}$, $\cos\varphi_0=\dfrac{C_2}{A}$ (затухающие колебания).

Задача 4. Свободно висящая на крючке однородная цепь соскальзывает с него под действием силы тяжести (трением можно пренебречь). Определить, за какое время соскользнет с крюка вся цепь, если в начальный момент цепь покоилась, длинна ее с одной стороны крюка была 10 м, а с другой – 8 м.

Решение. Пусть масса одного погонного метра цепи равна m. Обозначим через x длину большей части цепи, свешивающейся с крюка через время t после начала движения. К центру тяжести цепи приложена сила $F=[x-(18-x)]mg$. Масса всей цепи равна $18m$, ее ускорение равно $\ddot{x}$. Итак приходим к уравнению движения центра тяжести цепи: $18m\ddot{x}=(2x-18)mg$, или $\ddot{x}-\frac{gx}{9}=-g$. Это уравнение нужно интегрировать при начальных условиях: $x=10$, $\dot{x}=0$ при $t=0$.

Имеем линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами (см. уравнение 17). Общее решение определим по формуле : $x=\bar{x}+x^*$. Составим характеристическое уравнение $k^2-\frac{g}{9}=0$ и найдем его корни $k_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{g}}{3}$. Частное решение $x^*=A$; после подстановки в уравнение находим $A=9$. Таким образом, общее решение уравнения есть $x=C_1e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}+C_2e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}+9$.

Используя начальное условие, получим:

$$\begin{cases} C_1+C_2+9=10 \\ (\frac{\sqrt{g}}{3})(C_1-C_2)=0. \end{cases}$$

Откуда $C_1=C_2=\frac{1}{2}$. Следовательно $x=\frac{e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}+e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}}{2}+9=9+ch(\frac{\sqrt{g}}{3}t)$.

Время за которое соскользнет вся цепь, определим из условия: $x=18m$ при $t=T$. Следовательно, $18=9+ch(\frac{T\sqrt{g}}{3})$ или $\frac{e^{\frac{T\sqrt{g}}{3}}+e^{-\frac{T\sqrt{g}}{3}}}{2}=9$. Решая полученное уравнение относительно T, находим $T=(\frac{3}{\sqrt{g}})\ln(9+4\sqrt{5})\approx 2{,}76$ с.

<u>**Задача 5**</u>. Один конец пружины закреплен неподвижно, а к другому прикреплен груз массы m , на который действует периодическая возмущаю-

щая сила Hsin(ωt+φ), направленная по вертикали. При отклонении груза на расстояние x от положения равновесия пружина действует на него с силой kx (упругая сила пружины), направленной к положению равновесия; при движении груза со скоростью v сила сопротивления среды равна bv (ω>0, k>0, H>0, 0<b<m, φ – постоянные). Найти движение груза в установившемся режиме и частоту возмущающей силы $\omega_{рез}$ (резонансную частоту), при которой амплитуда колебаний груза в установившемся режиме будет наибольшей. Найти эту амплитуду.

Решение. Пусть x=x(t) – отклонение груза от положения равновесия в момент времени t. Согласно второму закону Ньютона, $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$+Hsin($\omega t$+$\varphi$), откуда для определения закона движения груза x=x(t) получаем неоднородное линейное уравнение вида:

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = \frac{H}{m}\sin(\omega t + \varphi)$$

где $p=\frac{b}{m}$, $q=\frac{k}{m}$.

Запишем общее решение $x(t)=\bar{x}(t)+x^*(t)$.Поскольку p>0, q>0, то $\bar{x}(t)\to 0$ при $t \to \infty$, а $x^*(t)$= A(ω)sin (ω t+φ+α), где $A(\omega)=\frac{H}{m\sqrt{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}}$,

$\alpha = arctg\,\frac{p\omega}{\omega^2 - q}$. Частоту $\omega_{рез}$, при которой амплитуда A(ω) колебаний груза в установившемся режиме достигает наибольшего значения, можно найти из условия минимума функции $\Psi(\omega) = (q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2$. Имеем $\Psi'(\omega) = -4(q-\omega^2) + 2p^2\omega = 0$, откуда

$$\omega_{рез} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}$$

Амплитуда колебаний груза при резонансе такова:

$$A(\omega_{рез}) = \frac{H}{mp\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} = \frac{2mH}{b\sqrt{4km - b^2}}.$$

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ: «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ»

Задания:

1. Определить тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.
2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.
3. Понизить порядок данного уравнения, пользуясь однородностью, и решить уравнение.
4. Решить задачу Коши.
5. Найти общее решение дифференциального уравнения.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных.
7. Найти общее решение уравнения Эйлера, Лагранжа или Чебышева.
8. Решить дифференциальное уравнение методом разложения в степенной ряд (до указанной степени).
9. Решить задачу.
10. Решить задачу.

Вариант 1

1.1 $x^2 y'' + x^3 y' = y'^2$

2.1 $4y^3 y'' = 16y^4 - 1; \quad y(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

3.1 $x^2 yy'' - 2x^2 y'^2 + xyy' + y^2 = 0$

4.1 $y''' + 9y' = 0; y(0) = 1; \quad y'(0) = 1; \quad y''(0) = -1$

5.1 $y''' - y' = -2x + \cos x$

6.1 $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

7.1 $x^2 y'' - 9xy' + 21y = 0$

8.1 $y^{\prime v} = e^x y + y'; \quad y(0) = y'(0) = 0; \quad y''(0) = y'''(0) = 1 \quad (до \ x^6)$

9.1 Найти плоские кривые, у которых радиус кривизны пропорционален длине отрезка нормали. Рассмотреть случаи, когда коэффициент пропорциональности k равен ± 1, ± 2

10.1 Найти скорость, с которой тело падает на поверхность Земли, если считать, что оно падает с бесконечно большой высоты и движение происходит только под влиянием притяжения Земли. Радиус Земли считать равным 6400 км.

Вариант 2

1.2 $y'''(x-1)-y''=0$

2.2 $y''+8\sin y\cos^3 y=0;\quad y(0)=0; y'(0)=2$

3.2 $x^2yy''=(y'-xy')^2$

4.2 $y^{\mathrm{V}}-13y''+36y=0;\quad y(0)=0; y'(0)=1; y''(0)=2; y'''(0)=1$

5.2 $y^{\mathrm{V}}-y=8e^x+e^{2x}$

6.2 $y''-2y=\dfrac{2}{x^3}\left(x^2-1\right)$

7.2 $x^2y''+xy'+y=x$

8.2 $y^{\mathrm{V}}=xy+x^2;\quad y(0)=0; y'(0)=y''(0)=y'''(0)=1\quad (\text{до } x^7)$

9.2 Найти форму равновесия однородной нерастяжимой нити под действием силы тяжести (цепная линия).

10.2 Найти закон движения тела , падающего без начальной скорости . Допуская, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и что скорость имеет своим пределом при $t\to\infty$ величину $75 м/с$.

Вариант 3

1.3 $cthxy''+y'=chx$

2.3 $y''=72y^3;\quad y(2)=1; y'(2)=6$

3.3 $x^2\left(yy''-y'^2\right)+xyy'=y\sqrt{x^2y'^2+y^2}$

4.3 $y^{\mathrm{V}}=8y''-16y;\quad y(0)=1; y'(0)=0; y''(0)=-1; y'''(0)=1$

5.3 $y'''-2y'+2y=4e^x\cos x$

6.3 $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$

7.3 $y''-\dfrac{y'}{x}+\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{2}{x}$

8.3 $y'''=(y')^2;\quad y(0)=y'(0)=0, y''(0)=1;\quad (\text{до } x^4)$

9.3 Составить дифференциальное уравнение семейства плоских кривых $x^2+y^2+c_1x+c_2y+c_3=0$.

10.3 Цепь длиной 6*м* соскальзывает со стола. В момент начала движения со стола свисал 1*м* цепи. В течении какого времени со стола соскользнет вся цепь (трением пренебрегаем).

Вариант 4

1.4 $xy'''+y''=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2.4 $y''y^3+36=0;\quad y(0)=3; y'(0)=2$

3.4 $xyy''+xy'^2-yy'=0$

4.4 $y^{\mathrm{V}}=81y;\quad y(0)=0; y'(0)=0; y''(0)=1; y'''(0)=2$

5.4 $y'''-y''=2xe^x+1$
6.4 $y''-y=e^{2x}\cos e^x$
7.4 $x^2y''-2xy'+2y+x+2x^3=0$
8.4 $y'''=e^x y;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=1;\quad \left(\text{до } x^6\right)$
9.4 Найти кривые, у которых в любой точке радиус кривизны вдвое больше отрезка нормали, заключенного между этой точкой кривой и осью абсцисс, если известно, что кривая обращена выпуклостью к оси абсцисс.
10.4 Груз в Р кг подвешен на пружине и оттянул ее на а см. Затем пружина оттягивается еще на А см и отпускается без начальной скорости. Найти закон движения пружины, пренебрегая сопротивлением среды.

Вариант 5

1.5 $\left(1+x^2\right)y''+1+y'^2=0$
2.5 $4y^3y''=y^4-16;\quad y(0)=2\sqrt{2};\quad y'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}};$
3.5 $xyy''-xy'^2=yy'$
4.5 $y'''-13y'-12y=0;\quad y(0)=1; y'(0)=0; y''(0)=1, y'''(0)=-1$
5.5 $y^{IV}+2y''+y=\cos x-\sin 2x$
6.5 $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$
7.5 $x^3y'''+xy'-y=0$
8.5 $y''=xyy';\quad y(0)=y'(0)=1;\quad \left(\text{до } x^6\right)$
9.5 Два одинаковых груза подвешены к кольцу пружины. Найти закон движения одного из грузов, если другой оборвется. Дано, что удлинение пружины под влиянием одного из грузов равно а см.
10.5 Решить задачу 9.4 при условии, что кривая обращена выпуклостью к оси ординат.

Вариант 6

1.6 $2xy'y''=y'^2-1$
2.6 $y''+18\sin y\cos^3 y=0;\quad y(0)=0; y'(0)=3$
3.6 $yy''=y'^2+15y^2\sqrt{x}$
4.6 $y^{IV}+2y'''+y''=0; y(0)=0;\quad y'(0)=y''(0)=y'''(0)=1;$
5.6 $y''-9y=e^{3x}\cos x$
6.6 $y''-3y'+2y=\dfrac{e^x}{1+e^{-x}}$
7.6 $x^2y''-xy'+2y=0$
8.6 $y''=xy'-y+1;\quad y(0)=y'(0)=0,\quad \left(\text{до } x^4\right)$

9.6 Найти кривые, у которых радиус кривизны обратно пропорционален косинусу угла между касательной и осью абсцисс.
10.6 Материальная точка массы m отталкивается от центра O с силой, пропорциональной расстоянию. Сопротивление среды пропорционально скорости движения. Найти закон движения.

Вариант 7

1.7 $(1-x^2)y''-xy'=2$

2.7 $y''\cos y+y'^2\sin y-y'=0;\quad y(-1)=\dfrac{\pi}{6}; y'(-1)=2$

3.7 $(x^2+1)(y'^2-yy'')=xyy'$

4.7 $y^{\mathrm{v}}-y'''=0; y(0)=0;\quad y'(0)=y'''(0)=-1;\quad y''(0)=1;\quad y'^{v}(0)=1$

5.7 $y'''+y=x^2+1+e^x$

6.7 $y''+\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{4}ctg\left(\dfrac{x}{2}\right)$

7.7 $x^2y''-3xy'+3y=3\ln^2 x$

8.7 $y''=x\sin y';\quad y(1)=0; y'(1)=\dfrac{\pi}{2},\quad (\text{до } x^4)$

9.7 Определить формулу равновесия нерастяжимой нити с закрепленными концами, на которую действует нагрузка так, что на каждую единицу длины горизонтальной проекции нагрузка одинакова (цепи цепного листа). Весом самой нити пренебречь.
10.7 Материальная точка медленно погружается в жидкость. Найти закон движения, считая, что при медленном погружении сопротивление жидкости пропорционально скорости погружения.

Вариант 8

1.8 $xy'''+y''+x=0$

$4y^3y''=16y^4-1,\ y(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ y'(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3.8 $xyy''+xy'^2-yy'=0$

4.8 $y'^{\mathrm{v}}-13y''+36y=0,\quad y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=2, y'''(0)=1$

5.8 $y'''-y''=2xe^x+1$

6.8 $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$

7.8 $(2x+1)y''+4xy'-4y=0$

8.8 $y''=yy'-x^2;\quad y(0)=1, y'(0)=1\quad (\text{до } x^3)$

9.8 Найти интегральную кривую уравнения $yy'' + y'^2 = 1$, проходящую через точку $(0,1)$ и касающуюся в этой точке прямой $x + y = 1$ (почему получается одна интегральная кривая ?).

10.8 Частица массы m движется по оси Ox, отталкиваясь от точки $x = 0$ с силой $3mr_0$ и притягиваясь к точке $x = 1$ с силой $4mr_1$, где r_0 и r_1 - расстояние до этих точек. Определить движения частицы с начальными условиями $x(0) = 2, \dot{x}(0) = 0$.

Вариант 9

1.9 $x^3 y''' + x^2 y'' = 1$

2.9 $yy'' - y'^2 = y^2$; $y(0) = 1, y'(0) = 0$

3.9 $x^2 yy'' = (y - xy')^2$

4.9 $64y^{\text{viii}} + 48y^{vi} + 12y'^{v} + y'' = 0;$

$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 1, y'^{\text{v}}(0) = 1, y^{\text{v}}(0) = 0, y^{\text{vi}}(0) = 1, y^{vii}(0) = 1$

5.9 $y''' - 4y' = 3 + e^{2x}$

6.9 $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

7.9 $x^2 y'' + 3xy' + y = \dfrac{1}{x}$

8.9 $y'' = y + x^2 + y'^2$; $y(0) = 1, y'(0) = 1$ $\left(\text{до } x^5\right)$

9.9 Найти интегральную кривую уравнения $yy'y'' = y'^3 + y''^2$, касающуюся в начале координат прямой $x + y = 0$.

10.9 Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источников постоянного тока, дающего напряжение U, сопротивления R, самоиндукции L и выключателя, который включается при $t = 0$. Найти зависимость силы тока от времени (при $t > 0$).

Вариант 10

1.10 $xy''' - y'' + \dfrac{1}{x} = 0$

2.10 $yy'' = y'^2$; $y(0) = 1, y'(0) = 1$

3.10 $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$

4.10 $y''' = -y'$; $y(0) = 2, y'(0) = 0, y''(0) = -1$

5.10 $y'^{v} - 5y''' + 6y'' = 2x + \sin 2x$

6.10 $y'' - y = \dfrac{4x^2 + 1}{x\sqrt{x}}$

7.10 $x^2 y'' - 3xy' + 4y = \dfrac{x^2}{2}$

8.10 $(1+x^2)y''+xy'-y=0;\quad y(0)=1, y'(0)=1 \quad (\text{до } x^3)$
9.10 Последовательно включены источники тока, напряжение каждого меняется по закону $E=v\sin\omega t$, сопротивление R и самоиндукция L. Найти силу тока в цепи (установившийся режим).
10.10 Найти плоские кривые, радиус кривизны которых пропорционален кубу длины отрезка нормали.

Вариант 11

1.11 $y'y'''=2y''^2$
2.11 $2yy''=y'^2;\quad y(-1)=4, y'(-1)=1$
3.11 $x^2yy''+y'^2=0$
4.11 $y^{\prime\mathrm{v}}+2y''+y=0;\quad y(0)=0, y'(0)=0, y''(0)=1, y'''(0)=2$
5.11 $y^{\mathrm{v}}+y'''=x^2+5$
6.11 $y'''+y'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$
7.11 $(x^2-1)y''+xy'-2y=0$
8.11 $y''-xy'-y=0;\quad y(0)=1, y'(0)=0$
9.11 Найти уравнение кривой, касающейся оси абсцисс в начале кординат, если ее кривизна в любой точке равна $\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.
10.11 Найти закон движения тела, падающего в воздухе без начальной скорости, считая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости.

Вариант 12

1.12 $y'''=2(y''-1)ctgx$
2.12 $y'^2+yy''=yy';\quad y(0)=1, y'(0)=2$
3.12 $xyy''=y'(y+y')$
4.12 $y'''-4y''+5y'=0;\quad y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=2$
5.12 $y^{\prime\mathrm{v}}-y=x^2+e^x$
6.12 $y''-y'=e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$
7.12 $x^2y''-6y=12\ln x$
8.12 $y''=xy\cos y';\quad y(0)=1, y'(0)=\dfrac{\pi}{3} \quad (\text{до } x^4)$
9.12 Найти уравнения кривых, у которых радиус кривизны в любой точке равен длине отрезка нормали, заключенного между этой точкой и осью абсцисс, если кривая вогнута вверх.

10.12 Мяч массой 400*г* падает с высоты 16,7*м* без начальной скорости. Сопротивление воздуха пропорционально скорости мяча и равно 0,0048Н при скорости 1 *м/с*. Вычислить время падения и скорость мяча в конце падения. Принять g=10 *м/с*^{2}.

Вариант 13

1.13 $x^2y''' = y''^2$

2.13 $x^2y'' - 3xy' = \dfrac{6y^2}{x^2} - 4y$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 4$

3.13 $x^3y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$

4.13 $y''' - 3y' + 2y = 0;\ \ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1$

5.13 $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}x$

6.13 $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$

7.13 $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$

8.13 $y'' = xy^2 - y';\ \ y(0) = 2, y'(0) = 1$ $\left(\text{до } x^4\right)$

9.13 Найти уравнение кривых, у которых радиус кривизны в любой точке равен длине отрезка нормали заключенного между этой точкой и осью абсцисс, если кривая вогнута вниз.

10.13 Тело массы m движется прямолинейно под действием постоянной силы p. Найти скорость движения и пройденный им путь как функцию времени, если в начальный момент они оба равны нулю, а сопротивление среды пропорционально квадрату скорости.

Вариант 14

1.14 $y''' = y''^2$

2.14 $2yy'' = y'^2;\ \ y(-1) = 4, y'(-1) = 1$

3.14 $x^2\left(2yy'' - y'^2\right) = 1 - 2xyy'$

4.14 $y^{\prime\text{v}} + 8y'' + 16y = 0;\ \ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 1, y'''(0) = 1$

5.14 $y^{\prime\text{v}} - y = 5e^x \sin x$

6.14 $y'' - 2y' = \dfrac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

7.14 $x^2y''' - 2y' = 0$

8.14 $y'' = xy' - y + e^x;\ \ y(0) = 1, y'(0) = 1$ $\left(\text{до } x^4\right)$

9.14 Найти кривые постоянного радиуса кривизны.

10.14 Найти закон прямолинейного движения материальной точки массы m под действием отталкивающей силы, обратно пропорциональной кубу расстояния от точки до неподвижного центра. В начальный момент точка находится в покое и отстоит от центра на расстояние x_0.

Вариант 15

1.15 $y'' = \dfrac{y - xy'}{x^2}$

2.15 $yy'' = y'^2 - y'^3; \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$

3.15 $x^2 yy'' = (y - xy')^2$

4.15 $y^{\text{IV}} + 2y'' + y = 0; \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 2$

5.15 $y^{\text{IV}} + 2y'' + y = x^2 \sin x$

6.15 $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}$

7.15 $(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0$

8.15 $y'' = xy' + e^y; \quad y(0) = 0, y'(0) = 1 \quad (\text{до } x^6)$

9.15 Найти кривые, у которых радиус кривизны равен нормали.

10.15 Материальная точка массы m движется прямолинейно к неподвижному центру, притягивающему ее силой, обратно пропорциональной кубу расстояния от точки до неподвижного центра. В начальный момент точка находится в покое и отстоит от центра на расстояние x_0. Определить время, по истечении которого точка достигает центра.

Вариант 16

1.16 $\dfrac{y''^2 - y'y'''}{y'^2} = \dfrac{1}{x^2}$

2.16 $y^3 y'' = 1; \quad y(-2) = 1, y'(-2) = -1$

3.16 $4x^2 y^3 y'' = x^2 - y^4$

4.16 $y^{\text{V}} + y''' = 0; \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2, y'''(0) = 1, y^{IV}(0) = 1$

5.16 $y^{\text{V}} + y''' = x^2 + 5$

6.16 $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + e^{-2x}}$

7.16 $x^2 y'' - 2y = \sin \ln x$

8.16 $y'' = yx^2 + y'^3; \quad y(0) = y'(0) = 1 \quad (\text{до } x^6)$

9.16 Найти кривую, у которой радиус кривизны пропорционален кубу нормали.

10.16 Балка длины l, лежащая концами на двух опорах, находится под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q. Найти уравнение прогнутой оси балки и ее максимальный прогиб, выбрав начало координат в середине нагруженной балки.

Вариант 17

1.17 $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}$

2.17 $y'' y^3 + 9 = 0; \quad y(1) = 1, y'(1) = 3$

3.17 $x^2yy'' + y'^2 = 0$

4.17 $y'^{\text{v}} - y = 0; \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1, y'''(0) = 1$

5.17 $y^{\text{v}} + 4y''' = e^x + 1$

6.17 $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}$

7.17 $\left(x^2 - 1\right)y'' + xy' - 2y = 0 \quad \left(|x| > 1\right)$

8.17 $y'' = y' + xe^y; \quad y(0) = y'(0) = 1 \quad \left(\text{до } x^4\right)$

9.17 Найти кривую, у которой радиус кривизны вдвое больше нормали.

10.17 Балка длины l, встроенная правым концом в стену, изгибается силой p, приложенной к левому концу и равномерно распределенной нагрузкой q. Найти уравнение изогнутой балки и ее максимальный прогиб.

Вариант 18

1.18 $thxy'^{\text{v}} = y'''$

2.18 $2y''' - 3y'^2 = 0; \quad y(0) = -3, y'(0) = 1, y''(0) = -1$

3.18 $yy''' + 3y'y'' = 0$

4.18 $y'^{\text{v}} - 2y'' + y = 0; \quad y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = y'''(0) = 1$

5.18 $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}$

6.18 $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{x(x+3)}$

7.18 $\left(x^2 - 1\right)y'' + xy' - 16y = 0; \quad \left(|x| > 1\right)$

8.18 $y'' = x^2 - y^2y'; \quad y(0) = y'(0) = 1 \quad \left(\text{до } x^6\right)$

9.18 Найти кривые, у которых проекции радиуса кривизны на ось постоянны.

10.18 Тяжелое тело без начальной скорости скользит по наклонной плоскости. Найти закон движения, если угол наклона равен α, а коэффициент трения μ.

Указание: сила трения равна μN, где N - сила реакции плоскости.

Вариант 19

1.19 $y''' = xy'^{\text{v}}$

2.19 $y'' = 8y^3; \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$

3.19 $y'' + 2xy'^2 = 0$

4.19 $y''' + 2y'' + y' = 0; \quad y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 1$

5.19 $y''' - 3y' = 3\left(2 - x^2\right) + e^{-x}$

6.19 $y'' + y = tg^2 x$

7.19 $\left(1 - x^2\right)y'' - xy' + 9y = 0 \quad \left(|x| < 1\right)$

8.19 $y''' = xy'; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1 \quad (\text{до } x^6)$

9.19 Найти линию, для которой проекция радиуса кривизны на ось Oy есть величина постоянная, равная 7.

10.19 Моторная лодка весом 300*кг* движется прямолинейно с начальной скоростью66*м/с*. Сопротивление воды пропорционально скорости и равно 10*кг* при скорости 1*м/с*. Через какое время скорость лодки будет 8*м/с*?

Вариант 20

1.20 $y'''x \ln x = y''$

2.20 $y''y^3 + 4 = 0; \quad y(0) = -1, y'(0) = -2$

3.20 $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$

4.20 $y'^{\text{v}} + y = 0; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

5.20 $y''' - 4y' = ch2x$

6.20 $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

7.20 $(1 - x^2)y'' - xy' + 2y = 0 \quad (|x| < 1)$

8.20 $y''' = x^2y' + y; \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 1 \quad (\text{до } x^4)$

9.20 Найти линию, длина дуги которой, отсчитываемая от некоторой точки, пропорциональна угловому коэффициенту касательной в конечной точке дуги.

10.20 Материальная точка массы m движется прямолинейно под действием силы притяжения к неподвижному центру, пропорциональной расстоянию от точки до центра $(k_1 > 0)$. Сила сопротивления среды пропорциональна скорости $(k_2 > 0)$. В начальный момент времени точка находится на расстоянии a от центра, скорость равна v_0 и направлена по прямой, соединяющей точку с центром. Найти закон движения, если $(k_2{}^2 < 4mk_1)$.

Вариант 21

1.21 $y'' + y'tgx = \sin 2x$

2.21 $y^3y'' = y^4 - 16; \quad y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}$

3.21 $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$

4.21 $y^{\text{v}i} + 2y^{\text{v}} + y'^{\text{v}} = 0; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = y'^{\text{v}}(0) = 1$

5.21 $y'^{\text{v}} + 4y'' = \sin 2x + 1$

6.21 $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x \ln x}$

7.21 $x^3y''' + 8x^2y'' + 12xy' = \ln x$

8.21 $y''' = xy' + 1; \quad y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 2 \quad (\text{до } x^6)$

9.21 Найти кривые, у которых радиус кривизны пропорционален модулю радиус-вектора из начала координат до точки кривой.
10.21 Груз массы m покоится на упругой рессоре. На груз действуют восстанавливающая сила пропорциональная отклонению kS ($k>0$ – жесткость рессоры) и сила сопротивления, направленная в сторону против движения и пропорциональная скорости движения λv ($\lambda > 0$ – амортизатор)
Записать уравнение движения.

Вариант 22

1.22 $y'' = 2y^3$
2.22 $y'' = 2y^3; \ \ y(-1) = y'(-1) = 1$
3.22 $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^2}{y}$
4.22 $y^{vi} - 2y^{v} + 3y'^{v} - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0;$
$y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = y'''(0) = y'^{v}(0) = y^{v}(0) = 1$
5.22 $y''' - 4y'' = 2sh2x$
6.22 $y'' + 4y = \frac{1}{\cos^3 2x}$
7.22 $x^3 y''' - xy' - 3y = x^2$
8.22 $y'^{v} = x^2 y''; \ \ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2, y'''(0) = 1$ (до x^6)
9.22 При каких a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0 \to 0$ при $x \to \infty$.
10.22 Если тело медленно погружается в воду, то его скорость v и ускорение w приближенно связаны уравнением $w = q - kv$ (q и k - $const$). Установить закон движения тела, если при $t = 0, S = 0, v = 0$.

Вариант 23

1.23 $y''' = (y'')^2$
2.23 $y''y^3 = -1; \ \ y(1) = y'(1) = -1$
3.23 $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$
4.23 $y^{v} + 8y''' + 16y' = 0; \ \ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = y'^{v}(0) = 1$
5.23 $y''' + y' = x + \cos 3x$
6.23 $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$
7.23 $(x+2)^2 y'' - 4(x+2)y' + 6y = 0$
8.23 $y'^{v} + x^4 y = 0; \ \ y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = y'''(0) = 1$ (до x^6)
9.23 При каких a и b изо всех решений уравнения $y'' + ay' + by = 0$ имеется хотя бы одно решение $y(x) \neq 0 \to 0$ при $x \to +\infty$?

10.23 Груз массой 4*кг* подвешен на пружине и увеличивает ее длину на 1*см*. Найти закон движения груза, если верхний конец пружины совершает гармоническое вертикальное колебание $y = 2\sin 30t\,(см)$ и в начальный момент груз находился в покое (сопротивлением среды пренебречь).

Вариант 24

1.24 $y'y''' = 2y''^2$

2.24 $y'' = 6y^3;\ \ y(1) = 1, y'(1) = 2$

3.24 $y'' = \left(2xy - \dfrac{5}{x}\right)y' + 4y^2 - \dfrac{4y}{x^2}$

4.24 $y^{\text{IV}} + 2y''' + y'' = 0;\ \ y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = y'''(0) = 1$

5.24 $y''' + 3y'' - 10y' = xe^{-2x}$

6.24 $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} arctgx$

7.24 $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$

8.24 $y'' - e^x y' + y = 0;\ \ y(0) = y'(0) = 1\ \ (\text{до } x^4)$

9.24 При каких k и ω уравнение $y'' + k^2 y = \sin\omega t$ имеет хотя бы одно периодическое решение?

10.24 Материальная точка массы m движется прямолинейно под действием силы отталкивания от неподвижного центра, пропорциональный расстоянию от точки до центра $(k_1 > 0)$. Сила сопротивления среды пропорциональна скорости $(k_2 > 0)$. В начальный момент точка находится на расстоянии a от центра, скорость равна v_0 и направлена по прямой, соединяющей точку с центром. Найти закон движения точки.

Вариант 25

1.25 $tgx \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0$

2.25 $y''y^3 + 64 = 0;\ \ y(0) = 4, y'(0) = 2$

3.25 $y''x^2 = y - xy'$

4.25 $y^{\text{V}} - 6y^{\text{IV}} + 9y''' = 0;\ \ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = y^{\text{IV}}(0) = 1$

5.25 $y''' + y' = xe^x + 2e^{-x}$

6.25 $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}$

7.25 $x^3y''' + xy' - y = 0$

8.25 $y''' = e^y y'';\ \ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1\ \ (\text{до } x^6)$

9.25 Найти кривые, у которых радиус кривизны есть данная функция $f(\alpha)$ угла α, образуемого касательной с осью Ox; $f(\alpha) = a$.

10.25 Тело массы m движется прямолинейно под действием постоянной силы F. Найти скорость движения тела и пройденный им путь, если в начальный момент времени они оба равны нулю, а сопротивление среды пропорционально квадрату скорости.

Литература

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1985.

2. *Бугров Я.С.*, *Никольский С.М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы, Ряды. ФКП. М.: Наука, 1985.

3. *Данко П.Е.*, Попов А.Г., Кожевникова Г.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: ч. II. М.: Высшая шк., 1997.

4. *Краснов М.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высшая шк., 1983.

5. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. *М.:* Высшая. шк., 1988.

6. *Самойленко А.М.*, Кривошеев С.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. М.: Вые. шк., 1989.

7. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / Под ред. *А.В. Ефимова*, *Б.П. Демидовича*. М.: Наука, 1981.

8. *Тихонов А.Н., Васильев А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

9. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

10. *Филиппов А.Ф.* Задачи и примеры по дифференциальным уравнениям. Изд. МГУ, 1998.

11. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1992. 11/ Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1985.

Оглавление

Татьяна Вениаминовна Труфанова,
доцент кафедры МАиМ АмГУ, канд. техн. наук;

Алевтина Евгеньевна Ситун,
доцент кафедры ОМиИ АмГУ.

Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Часть II. Уравнения n-го порядка. Учебно-методическое пособие.

Изд-во АмГУ. Подписано к печати 21.05.2001. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 3,02 , уч.-изд. л. 3,1. Тираж 50. Заказ 55.