2. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В ТКАЧЕСТВЕ

При научных исследованиях процесса ткачества часто приходится встречаться со случайными величинами, которые во время опыта принимают те или иные числовые значения, причем заранее неизвестно, какие именно (например, масса и размер бобин при перематывании пряжи, объемная плотность намотки при сновании, величина мягких отходов при шлихтовании, обрывность нитей в ткачестве и др.).

Как бы точно и подробно ни были фиксированы условия опытов, невозможно достигнуть того, чтобы при их повторении результаты полностью и в точности совпадали. Большинство задач, возникающих в технологии ткачества, требуют изучения не только основных, главных закономерностей, определяющих явление в общих чертах, но и анализа случайных возмущений и искажений, связанных с наличием второстепенных факторов и придающих исходу опыта элемент неопределенности.

Устойчивость массовых случайных явлений, многократно подтвержденная опытом, служит базой для применения вероятностных (статистических) методов исследования. Изучение законов, управляющих массами случайных явлений, позволяет осуществить не только научный прогноз, но и помогает целенаправленно влиять на ход случайных процессов, контролировать, сужать и ограничивать их влияние на исследуемый процесс.

Вероятностный, или статистический, метод в теории ткачества не противопоставляется классическому, а является его дополнением, позволяющим глубже анализировать явление с учетом присущих ему элементов случайности. Это оправдано и тем, что при углубленном изучении технологии ткачества неизбежно наступает этап, когда требуется выявление не только основных закономерностей, но и анализ возможных отклонений от них.

В методических указаниях рассматриваются законы распределения одномерных случайных величин, которые наиболее часто встречаются в технологии ткачества, и кратко приводятся некоторые условия их применения.

2.1.ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Каждая случайная величина имеет ряд значений, которые возникают с определенной вероятностью. В этом случае распределение случайной величины представляет собой перечисление ее возможных значений с указанием их вероятностей.

Случайные величины могут носить прерывный (или дискретный) и непрерывный характер. Дискретная случайная величина может принимать лишь определенные значения, которые отделены друг от друга конечными интервалами (например, количество обрывов основных нитей на ткацком станке в течение определенного промежутка времени его работы, число дефектов в куске ткани).

Случайная величина, принимающая все значения из некоторого интервала, называется непрерывной (например, погрешность работы основного регулятора на ткацком станке, расход основной и уточной пряжи при наработке единицы длины ткани).

Для характеристики случайной величины необходимо знать не только ее возможные значения, но и насколько часто появляются различные значения этой величины. Частоту появления случайной величины лучше всего характеризовать вероятностью отдельных ее значений, то есть для случайной величины X следует указывать не только ее значения x_1, x_2, … , но и вероятность событий $X=x_i$:

$$p_i = P(X = x_i), \text{где} \, i = 1, 2, 3, \ldots \, . \tag{2.1}$$

Если перечислены все возможные значения X, то события $X=x_i$ не только не совместны, но и единственно возможны, поэтому сумма заданных вероятностей p_i должно равняться единице.

Закон распределения дискретной случайной величины чаще всего имеет табличную форму изложения, где перечисляются все возможные значения случайной величины и вероятности, с которыми они возникают.

Для наглядности ряд распределения изображают графически, откладывая в прямоугольной системе координат по оси абсцисс возможные значения случайной переменной, а по оси ординат их вероятности. При графическом изображении образуется полигон распределения, или эмпирическая кривая распределения, которая служит одной из форм закона распределения.

Дискретная и непрерывная случайные величины имеют бесконечное множество значений, перечислить которые невозможно. Поэтому здесь рассматриваются вероятности P событий случайной величины, когда $X<x$, где x – некоторая текущая переменная (реализация случайной величины X).

Вероятность того, что $X<x$, зависит от текущей переменной x и является функцией от x. Она обозначается $F(x)$ и записывается символическим выражением:

$$F(x) = P(X < x). \tag{2.2}$$

Эта функция называется функцией распределения и служит одной из форм выражения закона распределения случайной величины. Данная универсальная характеристика может применяться как для прерывных, так и для непрерывных случайных величин, $F(x)$ называется также интегральным законом распределения, который имеет ряд свойств:

1. $F(x)$ всегда неотрицательная функция, т.е. $F(x) \geq 0$.
2. Поскольку вероятность не может принимать значения больше 1, то $0 \leq F(x) \leq 1$.
3. Так как $F(x)$ – неубывающая функция, то при $x_2 > x_1$ и $F(x_2) > F(x_1)$.
4. Предельное значение функции распределения при $x \to -\infty$ равно 0, а при $x \to +\infty$ равно 1.

Если случайная величина X дискретна и задана рядом распределения, то для нахождения функции ее распределения $F(x)$ для каждого x необходимо найти сумму вероятностей значений случайной величины X, которая лежит левее точки x.

Графическое изображение функции распределения представляет собой неубывающую кривую, значения которой лежат в интервале от 0 до 1 (рис.2.1).

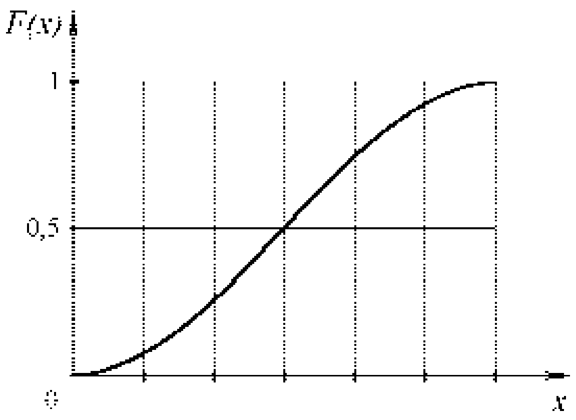

Рис.2.1. Распределение непрерывной случайной величины

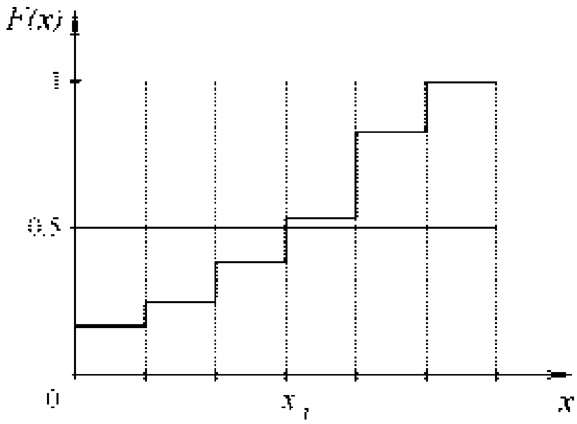

Рис.2.2. Распределение дискретной случайной величины

Вероятность $F(x)$ дискретной случайной величины увеличивается скачком при прохождении x через каждое возможное значение x_i величины X. Между двумя соседними значениями функция $F(x)$ неизменна, поэтому графически она изображается в виде ступенчатой кривой (рис.2.2).

Для непрерывной случайной величины функция распределения обычно непрерывна во всех точках и непрерывно дифференцируема. Если для нее вычислять вероятность попадания на участок от x до $x+\Delta x$, т.е. вероятность $P(x<X<x+\Delta x)$, то оказывается, что она равняется приращению функции распределения на этом участке $F(x+\Delta x)-F(x)$. При бесконечно малой величине Δx отношение вероятности попадания на участок к длине участка равно

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = F'(x). \qquad (2.3)$$

Выражение (2.3) является производной от функции распределения, характеризующей плотность, с которой распределяются значения случайной переменной в данной точке. Эта функция называется плотностью распределения и часто обозначается $f(x)$. Ее называют еще дифференциальной функцией, или дифференциальным законом распределения.

Вероятность того, что случайная величина X примет значения, лежащие в границах от a до $в$, равна определенному интегралу от плотности вероятности в тех же пределах, т.е.

$$P(a < X < в) = \int_a^в f(x)\,dx\ . \qquad (2.4)$$

Кривая, изображающая плотность распределения случайной величины называется дифференциальной кривой распределения (рис. 2.3).

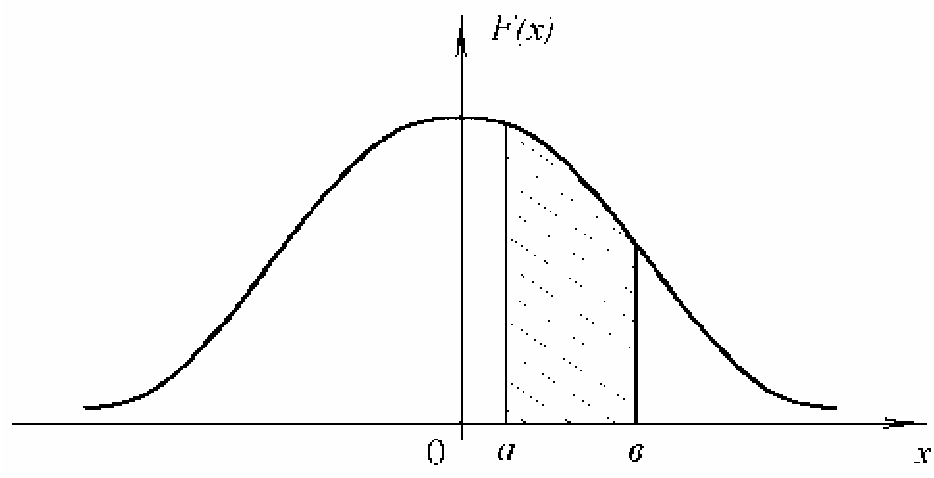

Рис. 2.3. Дифференциальное распределение

Если на оси абсцисс выделить участок $a\,в$, то площадь под кривой закона распределения на этом участке определит вероятность того, что случайная величина окажется в указанных пределах.

Плотность распределения обладает двумя основными свойствами:

1) функция плотности распределения не может принимать отрицательные значения, т.е. $f(x) \geq 0$;

2) площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна 1, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

В каждом отдельном случае эмпирическую кривую распределения, полученную в результате наблюдений или измерений, можно рассматривать как некоторое приближение к соответствующей кривой распределения случайной величины, а характеристики ряда распределения – как приближение к аналогичным характеристикам кривой распределения.

Степень приближения будет возрастать по мере увеличения числа наблюдений или измерений.

Конечной целью исследования эмпирических кривых распределения является установление теоретической кривой, которая наиболее близко описывала бы данный эмпирический материал.

В статистической практике ткачества наибольшее распространение законы равной вероятности, Бернулли, Пуассона, Гаусса, Рэлея и экспоненциальный.

2.2. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Распределение по закону равной вероятности (равномерное дискретное распределение) встречается, в частности, в ошибках при округлении отсчёта по шкале до ближайшего целого деления; в ошибках отсчёта времени при движении стрелки скачками, в ошибках от эксцентриситетов и т.д.

Область возможных значений случайной величины, подчиненной закону равной вероятности, определяется в пределах от *в* до *с*. Существует два параметра закона: $в$ и c или $a = \frac{в+c}{2}$ и $l = \frac{c-в}{2}$.

Плотность вероятности равна

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; при \;\; x < в, \\ \frac{1}{c-в} \; при \;\; в \le x \le c, \\ 0 \; при \;\; x > c. \end{cases} \tag{2.5}$$

Функция распределения будет

$$F(x)=\begin{cases} 0 \; при \;\; x < в, \\ \dfrac{x - в}{c - в} \; при \;\; в \le x \le c, \\ 0 \; при \;\; x > c. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ показаны на рис. 2.4.

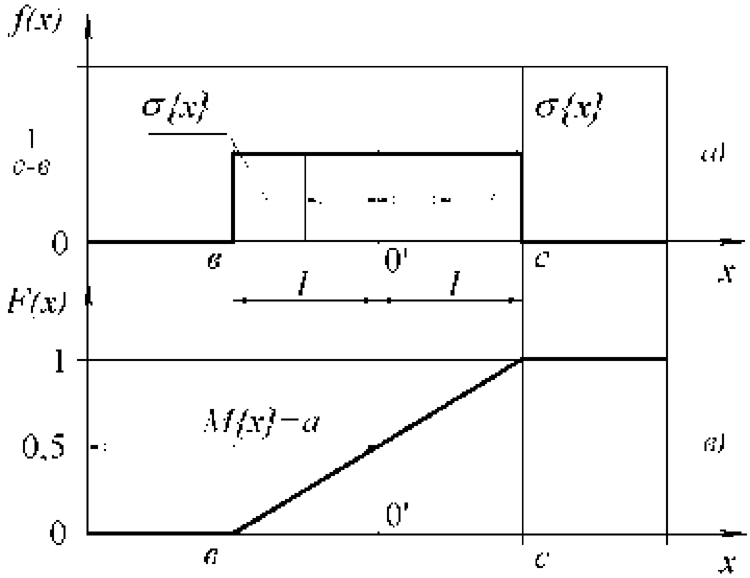

Рис. 2.4. Дифференциальная (*а*) и интегральная (*в*) кривые равномерного закона распределения

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение соответственно равны:

$$M\{X\}=\frac{в + c}{2}=a \, , \qquad (2.7)$$

$$D\{X\}=\frac{(c - в)^2}{12}=\frac{l^2}{3} \, , \qquad (2.8)$$

$$\sigma\{X\} = \frac{c - в}{2\sqrt{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}}. \quad (2.9)$$

Вероятность попадания случайной величины X в интервал (d, f) при $в < d < f < c$ равна

$$P(d < x < f) = \frac{f - d}{c - в}. \quad (2.10)$$

К более удобной форме записи закона равной вероятности приводит его центрирование, т.е. принятие за начало отчета 0 величины X ее среднего значения $M\{X\} = a$. В этой новой системе координат $M\{X\} = 0$, а границы области возможных значений равны $-l$ и $+l$. При этих условиях формулы (2.1) и (2.2):

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; при \; x < -l, \\ \dfrac{1}{2l} \; при - l \le x \le l, \\ 0 \; при \; x > l; \end{cases} \quad (2.11)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; при \; x < -l, \\ \dfrac{x + l}{2l} \; при - l \le x \le l, \\ 1 \; при \; x > l. \end{cases} \quad (2.12)$$

Пример 1

При подсчете плотности ткани по основе или утку с помощью ткацкой лупы с квадратным отверстием 10х10 мм первая и последняя нити могут попадать в поле зрения не полностью. В этом случае возникает ошибка подсчета: или нить засчитывается, или отбрасывается. Проведено несколько наложений лупы на образец ткани с подсчетом числа основных нитей в отверстии. Получено 15 или 16 нитей, то есть плотность оп основе P_o составила 150 н/дм или 160 н/дм.

Здесь имеем распределение случайной величины X=P_o, которая может принимать все значения в интервале 150 – 160 н/дм. В этом случае

$$f(x) = \frac{1}{c - в} = \frac{1}{160 - 150} = 0{,}1.$$

На рис. 2.5 изображена плотность вероятностей равномерного непрерывного распределения.

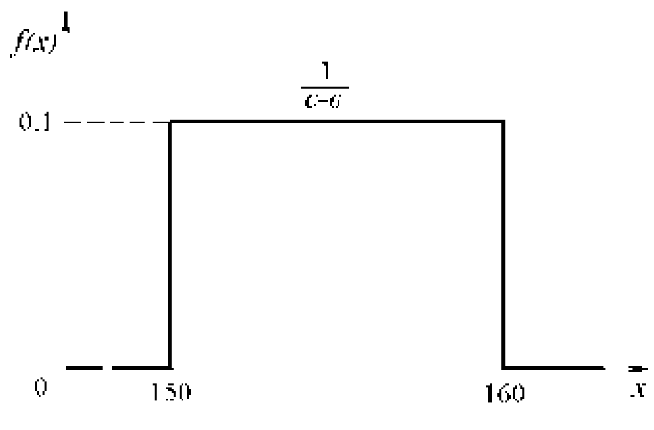

Рис. 2.5. Плотность распределения
числа нитей на 1 дм

Среднее и среднее квадратическое значения будут:

$$M\{X\} = \frac{160+150}{2} = 155\, н\,/\,дм;$$

$$\sigma\{X\} = \frac{160-150}{2\sqrt{3}} = 2{,}9\, н\,/\,дм.$$

2.3.ЗАКОН БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БЕРНУЛЛИ)

Биномиальное распределение встречается в задачах о нахождении числа m появления события A при повторении n независимых испытаний с постоянной вероятностью p. Вероятность противоположного события q равна $1-p$. Распределение находит применение при контроле качества продукции, а также в технике построения контрольных карт для расчета контрольных границ.

Биномиальное распределение позволяет решить задачу о нахождении совокупности из N экземпляров, из которых M обладает некоторым признаком A, а у остальных $N-M=qN$ этот признак отсутствует. При этом $p+q=1$.

Формула биномиального закона распределения имеет вид:

$$P_m = \frac{n!}{m!(n-m)!}\, p^m\, q^{n-m}. \qquad (2.13)$$

Биномиальное распределение определяется двумя параметрами:

1) p- может иметь любое значение между 0 и 1;

2) n- целое положительное число.

При p= 0,5 закон распределения симметричный. При $p\neq 0,5$ закон распределения несимметричный, причем несимметричность становится менее резко выраженной при увеличении числа n, а также при приближении значения p к 0,5. На рис. 2.6 для примера показаны вероятности P_m биномиального распределения для случаев n= 5, p= 0,05 и n= 8, p=0,40. Чтобы получить наглядное представление о виде биномиального распределения, нужно графически представить вероятности уравнения (2.1) для конкретных значений n и p. Для этого по оси абсцисс декартовой системы координат откладываются значения m=0,1...n, а по оси ординат – соответствующие вероятности P_m.

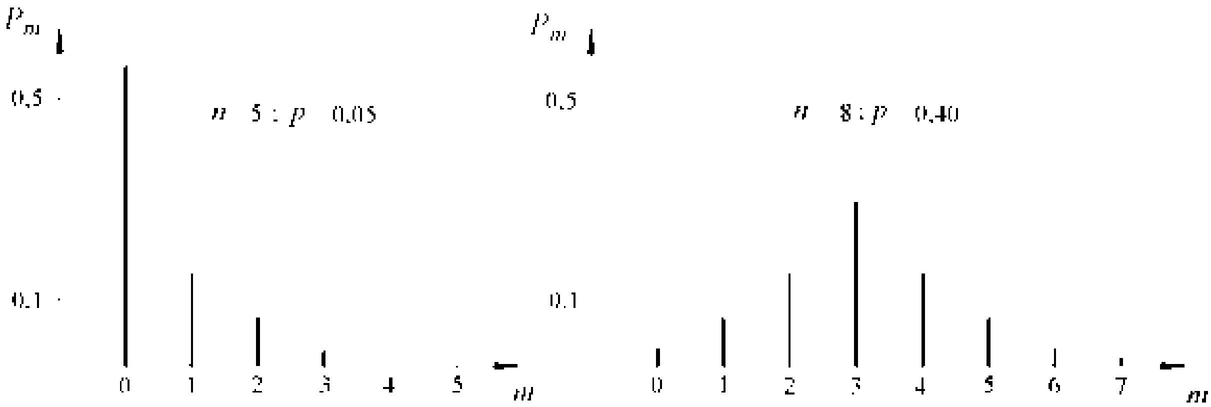

Рис. 2.6. Вероятности P_m биномиального распределения

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение биномиального распределения определяются формулами:

$$M\{X\} = n\ p\ , \tag{2.14}$$

$$D\{X\} = n\,p\,q\,, \tag{2.15}$$

$$\sigma\{X\} = \sqrt{n\,p\,q}\,. \tag{2.16}$$

Асимметрия и эксцесс определяются равенствами:

$$S\{X\} = \frac{q-p}{\sqrt{n\,p\,q}}\,, \tag{2.17}$$

$$E\{X\} = \frac{1-6p\,q}{n\,p\,q}\,. \tag{2.18}$$

Асимметрия положительна (S>0) при p<0,5 и отрицательна (S<0) при p>0,5.

Так как биномиальное распределение двухпараметрическое, то для него не удается составить достаточно подробных и в то же время компактных таблиц. При вычислении значений P_m удобно пользоваться таблицами биномиальных коэффициентов [7].

При $p=const$ и $n\to\infty$ биномиальное распределение стремится к распределению Гаусса. При $p = \frac{\lambda}{n} \to 0\ (\lambda = const)$ биномиальное распределение стремится к распределению Пуассона.

Пример 2

В сновальный цех поступили бобины с различной массой пряжи. Ранее было установлено, что бобины с массой пряжи ниже нормативной составляют 10% от количества всех бобин, что вызывает их ранний сход в шпулярнике. Было взято случайным образом 10 проб – по 5 бобин в каждой пробе. Требуется определить ожидаемое число проб, в которых будет 0, 1, 2, 3, 4, 5 бракованных бобин.

Эту задачу можно решить с использованием биномиального распределения. Доля проб, в которых не будет бракованных бобин, определится по биному при $m = 0$; $n = 5$; $p = 0{,}1$; $q = 0{,}9$ по формуле (3.1). Эта доля равна 0,590. Доля проб, в которых ожидается одна бракованная бобина ($m= 1$; $n=5$; $p= 0{,}1$; $q =0{,}9$), равна 0,328. При $m = 2$ $P_m = 0{,}073$, при $m = 3$ $P_m = 0{,}009$, при $m = 4$ и $m = 5$ P_m практически равно 0. Умножив полученные доли на 10 (число проб) и округлив их до целого числа, получим, что из 10 проб в 6 пробах не должно быть ни одной бракованной бобины, в 3 пробах – по 1 бракованной бобине, в 1 пробе – 2 бобины. Появление проб с тремя, четырьмя и пятью бракованными бобинами маловероятно.

Биномиальное распределение – распределение дискретной величины, поскольку величины m могут принимать только вполне определенные целые $m = 0, 1, 2, 3…n$.

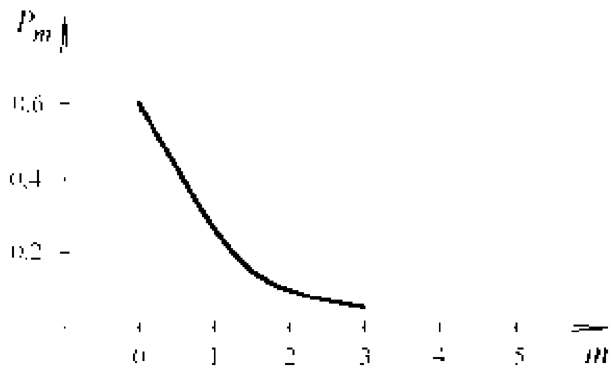

Рис. 2.7. Биномиальное распределение значения при p=0,1 и n=5

График биномиального распределения (рис. 2.7), на котором по оси абсцисс откладываются числа наступления события, а по оси ординат –

вероятности этих чисел, представляет ломаную линию. Наиболее вероятная частота отмечается на графике наибольшей ординатой.

2.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Распределение Пуассона встречается в задачах о повторении испытаний, в которых вероятность события очень мала (редкие события), например, обрывность нитей на ткацком станке, брак ткани определенного вида, прохождение узла через нитенатяжитель утка на ткацком станке и т.д.

Формула закона Пуассона имеет вид:

$$P(X = K) = \frac{\lambda^{K}}{K!} e^{-\lambda}, (K = 0, 1, 2, ...). \qquad (2.19)$$

Функцию распределения находят

$$P(X < K) = \sum_{i=0}^{K} (X = i) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ \sum_{i=0}^{K} \frac{\lambda^{i}}{i!} e^{-\lambda} \text{ при } x \geq 0 . \end{cases} \qquad (2.20)$$

Распределение Пуассона определяется только одним параметром (числом λ), поэтому он легко табулируется. Таблицы для вычисления значений функций можно найти в [6].

Закон Пуассона несимметричный, причем несимметричность становится менее резко выраженной при увеличении числа λ (рис. 2.8).

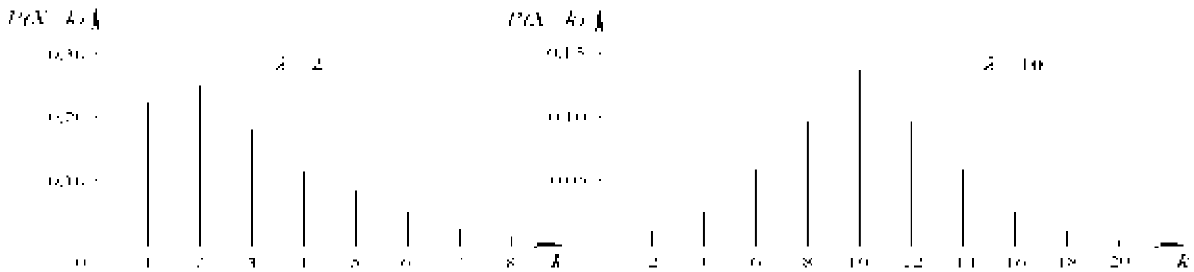

Рис. 2.8. Распределение Пуассона при различных значениях λ

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение равны:

$$M\{X\} = D\{X\} = \lambda\ , \tag{2.21}$$

$$\sigma\{X\} = \sqrt{\lambda}\ . \tag{2.22}$$

Равенство значений $M\{X\}$ и $D\{X\}$ не является противоречивым в смысле соблюдения размерностей, так как случайная величина X, подчиняющаяся закону Пуассона, является безразмерной. Асимметрия и эксцесс всегда положительны и равны:

$$S\{X\} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,, \tag{2.23}$$

$$E\{X\} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,. \tag{2.24}$$

При увеличении значения $\lambda \to 0$ распределение Пуассона асимптотически приближается к закону Гаусса. Одним из характерных признаков распределения Пуассона является равенство между математическим ожиданием и дисперсией. Это свойство распределения часто применяется на практике при оценке соответствия распределения случайной величины X по закону Пуассона.

Пример 3

На ткацком станке нить обрывается в среднем 0,375 раза в течение часа работы станка. Найти вероятность того, что за смену (8 часов) число обрывов нити будет составлять от 2 до 4 обрывов.

Величина a за смену будет $a = 0{,}375 \cdot 8 = 3$.

Вероятность $P(2 \le X \le 4) = P_2 + P_3 + P_4$.

По табл. 8 приложения [7] при $a = 3$

$P_2 = 0{,}224; P_3 = 9{,}224; P_4 = 0{,}168$,

откуда

$P(2 \le X \le 4) = 0{,}616$.

2.5. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГАУССА

В технических приложениях случайные величины, имеющие рассеивание) образуются главным образом по схеме суммы большого числа слагаемых. Это значит, что рассматриваемая величина получает различные значения, т.е. имеет рассеивание при практически неизменных условиях исследования. Такое рассеивание случайных величин часто встречается в технологии ткачества (например, отклонения поверхности намотки на сновальном валу и ткацком навое, неравномерность статического натяжения основы, отклонения в размерах и массе паковок и т.п.).

Схематизируя такого рода явления, исследуемую величину представляют в виде суммы большого числа слагаемых:

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i \,. \tag{2.24}$$

Гаусс вывел закон распределения, являющийся предельным законом непрерывной случайной величины при безграничном увеличении числа испытаний. Этот закон называется законом нормального распределения.

Непрерывная случайная величина X, принимающая значения на вещественной оси от $-\infty$ до $+\infty$, имеет нормальное распределение, если ее плотность описывается уравнением

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.25}$$

где $\bar{x}$ и σ - среднее значение и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*,

e = 2,71828, π = 3,14559.

Графическое изображение этой плотности распределения *f(x)* дает колоколообразную кривую Гаусса, которая располагается симметрично относительно вертикальной прямой $x=\bar{x}$, поэтому величину $\bar{x}$ называют центром распределения. Рассматривая влияние величины среднего квадратического отклонения на форму кривой, замечаем, что чем меньше параметр σ, тем кривая более вытянута около центра распределения, а так как площадь под кривой остается равной 1, то вытягивание вверх должно компенсироваться сжатием около центра распределения и более быстрым приближением кривой к оси абсцисс. При большом среднем квадратическом отклонении σ кривая становится плоской, растягиваясь вдоль оси абсцисс.

На рис. 2.9 показаны кривые нормального распределения (I, II, III) при $x=0$, из которых кривая III соответствует самому большому, а кривая I самому малому значению σ.

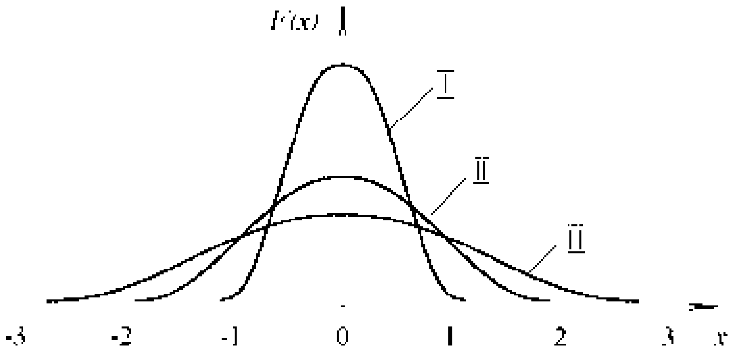

Рис. 2.9. Нормальное распределение при различных σ.

Если имеется случайная величина X с нормальным законом распределения, то можно определить вероятность попадания её в интервал от x_1 до x_2. Для этого надо найти определенный интеграл от названной функции, т.е.

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx . \qquad (2.26)$$

Это выражение можно упростить, принимая $t = \dfrac{x - \bar{x}}{\sigma}$. Тогда $dx = \sigma\, d\,t$.

Отсюда правая часть (5.3) примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} d\,t - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2}} d\,t = \Phi(t_2) - \Phi(t_1), \qquad (2.27)$$

где $t_1 = \dfrac{x_1 - \bar{x}}{\sigma}$, $t_2 = \dfrac{x_2 - \bar{x}}{\sigma}$.

Величина t называется стандартизованным (нормированным) отклонением, а $\Phi(t)$ интегральной нормированной (стандартизованной) функцией нормального распределения.

$$\varphi(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx .$$

Дифференциальной функцией, или плотностью нормального распределения, является подынтегральная функция интегрального закона распределения

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad (2.28)$$

где $t=\dfrac{x-\bar{x}}{\sigma}$.

Эта функция широко используется в математической статистике, а её значения при разных t табулированы [6]. Графическое изображение кривой нормального распределения показано на рис. 2.10.

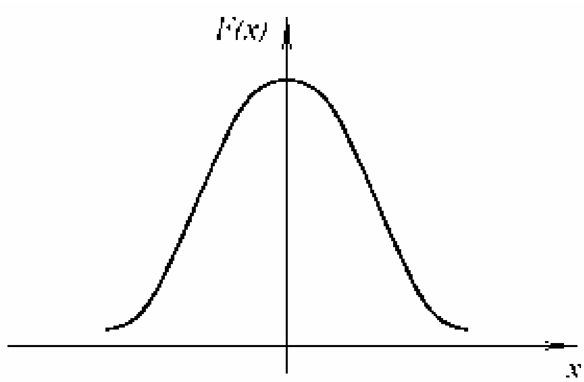

Рис. 2.10 . Стандартизованное нормальное распределение

Рассмотрим свойства кривой $\varphi(t)$.

1. Функция нормального распределения четная, т.е. $\varphi(-t)=\varphi(+t)$. Следовательно, кривая симметрична относительно оси ординат.

2. Функция имеет бесконечно ма лые значения при $t=\pm\infty$, ветви кривой удалены в бесконечность, асимптотически приближаются к оси абсцисс.

3. Функция имеет максимум при $t = 0$. Величина максимума составляет $\frac{1}{2\pi}$.

4. При $t = \pm 1$ функция дает точки перегиба. Следовательно, при отклонении от среднего значения в положительном и отрицательном направлениях на одно стандартизованное (нормированное) отклонение кривая дает переход от выпуклости к вогнутости.

5. Площадь между кривой и осью ot равна 1, поскольку интеграл Пуассона.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} d\,t = \sqrt{2\pi}\,.$$

6. Если случайная величина представляет сумму двух независимых случайных величин, каждая из которых следует нормальному закону, то она тоже следует нормальному закону распределения.

Закон нормального распределения наиболее распространен в технологии ткачества и часто соответствует эмпирическим распределениям. Многие эмпирические распределения весьма близки к нормальному распределению, так как значения случайной величины являются суммой большого количества воздействий, причем ни одно из них не имеет преимущества перед остальными. Подчиненность закону нормального распределения проявляется тем точнее, чем больше случайных величин действуют вместе. Зная, что эмпирическое распределение является нормальным, можно во многих случаях заменить простое наблюдение расчетом, найти оптимальные параметры исследуемого процесса.

Построение нормального распределения можно вести по плотности вероятности, т.е. используя функцию стандартизованного нормального распределения. В этом случае для найденных эмпирических нормированных величин t достаточно по таблице приложения [7] определить величины $\varphi(t)$ и умножить их на величину $N\,\Delta x\,/\,\sigma$, где

где N - общее число наблюдений;

i - величина интервала разбиения диапазона измерения X;

σ - среднее квадратическое отклонение.

Полученная величина и покажет теоретическую частоту в интервале нормального распределения данной совокупности.

Формула (2.29) служит для вычисления вероятности того, что нормированное отклонение случайной величины от среднего значения не выйдет за границы $\pm t$, т.е.

$$\varPhi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-t}^{+t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,d\,x\,. \qquad (2.29)$$

Функции $\varPhi(t)$ и связаны между собой соотношением

$$\varPhi(t)=\int\limits_{0}^{t}\varphi(x)\,d\,x\,. \qquad (2.30)$$

Таблицы соответствующих функций приведены в приложении [7]. В табл. II приведены значения функции $\varPhi(t)$ для положительных t.Для отрицательных t $\varPhi(-t)=-\varPhi(t)$. Отметим, что $\varPhi(0)=0$ и $\varPhi(\infty)=0{,}5$.

Пользуясь табл. II [7] , вычислим вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на участки, расположенные симметрично относительно ее математического ожидания $\bar{x}$:

$$\left.\begin{aligned} P(\bar{x}-\sigma<X<\bar{x}+\sigma)&=2\,\varPhi(1)=0{,}6821\\ P(\bar{x}-2\sigma<X<\bar{x}+2\sigma)&=2\varPhi(2)=0{,}9545\\ P(\bar{x}-3\sigma<X<\bar{x}+3\sigma)&=2\varPhi(3)=0{,}9973 \end{aligned}\right\} \qquad (2.31)$$

Таким образом, вероятность попадания случайной величины X за интервал $(\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma)$ очень мала – всего 0,0027. В силу этого в технических приложениях считается, что практически предельное отклонение случайной величины X, подчиняющееся гауссовому распределению, равно $\pm 3\sigma$.

Пример 4

Показать последовательность расчетов, пользуясь данными табл. 2.1, где даны эмпирические распределения 50 бобин по объемной плотности намотки ($X=\gamma$), а также все необходимые расчеты частот теоретического нормального распределения по эмпирическим данным. Для расчета теоретических частот приводятся произведения xm, сумма которых, деленная на число наблюдений, дает среднее значение объемной плотности, поскольку $\bar{x} = \dfrac{\sum xm}{\sum m}$.

Таблица 2.1

Распределение 50 бобин по объемной плотности намотки

X, г/см^3	Число бобин m	xm	x^2	$x^2 m$	$x-\bar{x}$	t	$\varphi(t)$	m_T
0,380	2	0,760	0,144	0,289	-0,020	-2,0	0,054	2
0,385	3	1,155	0,148	0,445	-0,015	-1,5	0,129	3
0,390	5	1,950	0,152	0,761	-0,010	-1,0	0,242	6
0,395	8	3,160	0,156	1,248	-0,005	-0,5	0,352	9
0,400	10	4,000	0,160	1,600	0	0	0,399	10
0,405	9	3,645	0,164	1,476	0,005	0,5	0,352	9
0,410	7	2,870	0,168	1,177	0,010	1,0	0,242	6
0,415	5	2,075	9,172	0,861	0,015	1,5	1,129	3
0,420	1	0,420	0,176	0,176	0,020	2,0	0,054	2
	50	20,035		8,033				50

В приведенном примере $\bar{x} = \dfrac{20{,}035}{50} = 0{,}401$,

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2 m}{\sum m} - \bar{x}^2 = \frac{8{,}033}{50} - (0{,}401)^2 = 0{,}0001, \sigma = \pm 0{,}01.$$

После нахождения средней и дисперсии для каждой строки таблицы определяется величина $t = \dfrac{x - \bar{x}}{\sigma}$. Имея значения t по каждой строке, можно по таблице приложения [7] найти для них $\varphi(t)$, т.е. плотность стандартизованного нормального распределения. Значения $\varphi(t)$ записываются в соответствующую графу табл. 1.

Чтобы получить теоретические частоты нормального распределения, эти значения умножаются на величину $N\,\Delta x / \sigma = \dfrac{50 \cdot 0{,}005}{0{,}01} = 25$, т.е. учитывается число наблюдений N, интервала Δx дробления эмпирических данных. Теоретические частоты m_T имеют целую и дробные части, но так как они выражают число повторений каждого варианта в совокупности, то могут представлять собой только целые числа, поэтому в последней графе табл. 1 величины m_T округлены до целых значений.

На рис. 2.11 изображены эмпирические и теоретические частоты распределения 50 бобин по их объемной плотности. Как видно из рис. 2.11, теоретическое нормальное распределение достаточно точно отражает поведение распределения эмпирической совокупности.

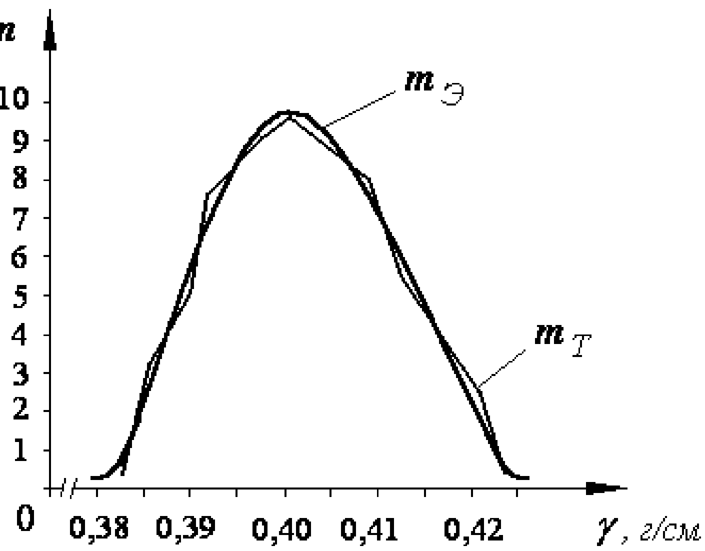

Рис.11 Распределение 50 бобин по объемной плотности намотки

2.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ

Закон Рэлея применяется для описания неотрицательных величин, в частности, когда случайная величина является радиусом - вектором при двухмерном гауссовом распределении. В ткацком производстве закон Рэлея широко применяется для анализа геометрической формы, например некруглости, нецилиндричности, эксцентриситета намотки на сновальных валах и ткацких навоях.

Распределение является геометрической суммой случайных величин $X = \sqrt{Y^2 + V^2}$, подчиненных закону Гаусса с параметрами $a_y = a_V = 0$, $\sigma_y = \sigma_V = \sigma_o$.

Плотность вероятности распределения Рэлея имеет вид:

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0 \; при \; x < 0, \\ \dfrac{x}{\sigma_o^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_o^2}} \; при \; x \geq 0, \end{cases} \tag{2.32}$$

где σ_o - среднее квадратическое отклонение исходного двухмерного распределения $\left(\sigma_o = \sigma_y = \sigma_V\right)$. Значение σ_o является параметром закона Рэлея.

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \;\; при \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma_o^2}} \;\; при \quad x \geq 0; \end{cases} \qquad (2.33)$$

При замене X новой переменной $Z = \dfrac{x}{\sigma_o}$ получим плотность вероятности и функцию распределения нормированного закона Рэлея:

$$\gamma(z) = \begin{cases} 0 \;\; при \quad z < 0, \\ z\, e^{-\frac{z^2}{2}} \;\; при \quad z \geq 0; \end{cases} \qquad (2.34)$$

$$F(z) = \begin{cases} 0 \;\; при \quad z < 0, \\ 1 - e^{-\frac{z^2}{2}} \;\; при \quad z \geq 0. \end{cases} \qquad (2.35)$$

Графики нормированной плотности вероятности и функции распределения показаны на рис. 2.12.

Дифференциальная кривая (рис. 2.12,*а*) имеет положительную асимметрию и более острую вершину, чем гауссово распределение.

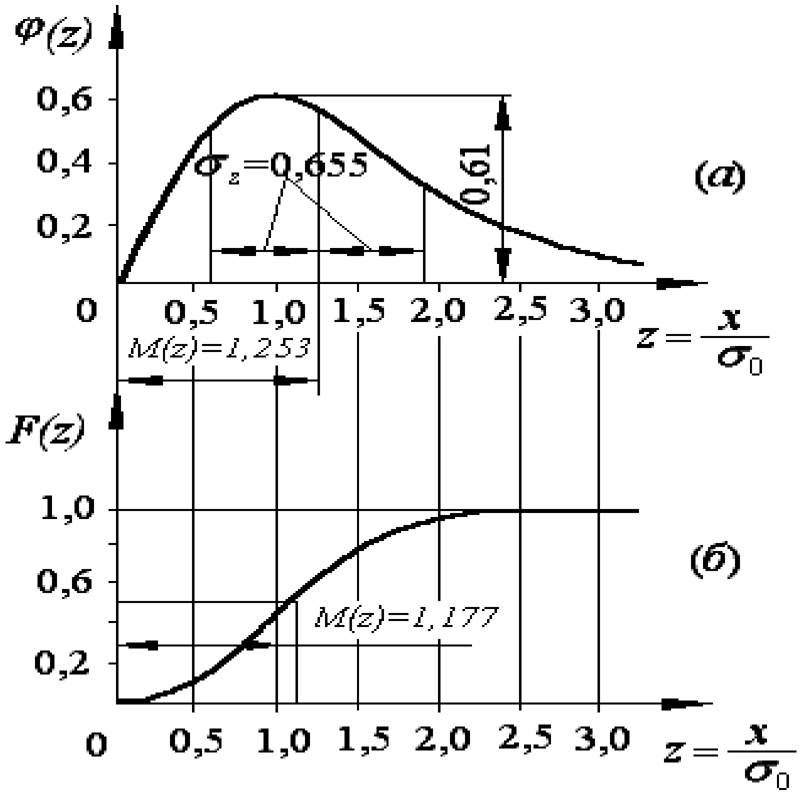

Рис.12 Плотность вероятности (*а*) и функция распределения (*б*) нормированного закона Релея

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение имеют вид:

$$M\{X\} = \sigma_o \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}253\,\sigma_o \ , \tag{2.36}$$

$$D\{X\} = \sigma_o^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}429\,\sigma_o^2 \ , \tag{2.37}$$

$$\sigma\{X\} = \sigma_o \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}} = 0{,}655\,\sigma_o \, . \tag{2.38}$$

Асимметрия и эксцесс имеют следующие значения:

$$S\{X\} = \frac{2\sqrt{\pi}(\pi - 3)}{\sqrt{(4-\pi)^3}} = 0{,}631, \tag{2.39}$$

$$E\{X\} = \frac{24\pi - 6\pi^2 - 16}{(4-\pi)^2} = 0{,}245. \tag{2.40}$$

Нормированное рэлеевское распределение не зависит от параметра σ_o и легко табулируется [8].

Пример 5

На сновальной машине в результате погрешности крепления в пинолях сновального вала его намотка имеет эксцентриситет. Экспериментально получено, что и минимальный радиус намотки при вращении вала изменяется случайно со средним квадратическим отклонением σ_o=0,5 мм. Нормированное распределение Рэлея *F(z)* не зависит от параметра σ_o, изменение *γ(z)* показано на рис. 2.12а, а величины $M\{X\}$ и $\sigma\{X\}$ для данного эксперимента $M\{X\} = 1{,}25$; $\sigma_o = 0{,}63\,мм$; $\sigma\{X\} = 0{,}655$ $\sigma_o = 0{,}33\,мм$.

2.7. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Экспоненциальному распределению подчиняется длительность промежутков времени между моментами двух последовательных появлений событий, число которых в единицу времени распределено по закону Пуассона (см. раздел 2.4). Это распределение находит широкое применений в технологии ткачества. Например, экспоненциальному распределению подчиняются промежутки времени между обрывами нитей, между регулировками и подналадками ткацких станков, измерение времени между двумя простоями некоторого количества станков и т.п.

Плотность вероятности определяется по формуле

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0 \; при \; z < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \; при \; x \geq 0 \end{cases}, \tag{2.41}$$

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}, \tag{2.42}$$

где λ - интенсивность или плотность потока событий;

α - среднее время между моментами наступления двух смежных событий.

Значение (2.42) является параметром экспоненциального распределения.

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; при \; x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} \; при \; x \geq 0. \end{cases} \tag{2.43}$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение соответственно равны:

$$M\{X\} = \frac{1}{\lambda}, \tag{2.44}$$

$$D\{X\} = \frac{1}{\lambda^2}, \tag{2.45}$$

$$\sigma\{X\} = \frac{1}{\lambda}. \tag{2.46}$$

Асимметрия и эксцесс запишутся:

$$S\{X\} = 2, \tag{2.47}$$

$$E\{X\} = 6. \tag{2.48}$$

При переходе в формулах (2.41) и (2.43) от случайной величины X к новой переменной $Z = \dfrac{X}{\sigma\{X\}}$ плотность вероятности и функция распределения нормированного экспоненциального закона будет:

$$\gamma(z) = \begin{cases} 0 \ \ при \quad z \le 0, \\ e^{-z} \ \ при \quad z > 0; \end{cases} \qquad (2.49)$$

$$F(z) = \begin{cases} 0 \ \ при \quad z \le 0, \\ 1 - e^{-zx} \ \ при \quad z > 0. \end{cases} \qquad (2.50)$$

Графики нормированной плотности вероятностей (2.49) и функции распределения (2.50) приведены на рис. 2.13*а* и 2.13*б*. Значения функций по формулам (2.49) и (2.50) вычисляются с помощью таблиц e^{x} и e^{-x} [7].

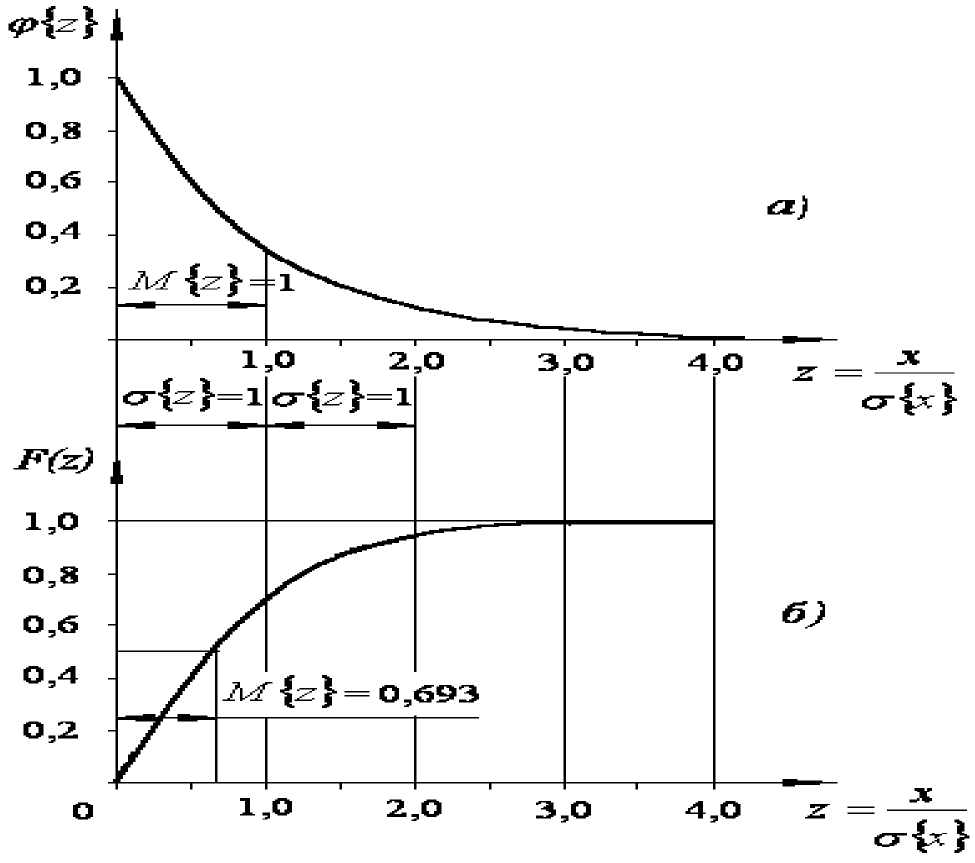

Рис.13 Плотность вероятности (*а*) и функция распределения (*б*) нормированного экспоненциального закона распределения

Пример 6

Пусть время $T_{(c)}$, необходимое для появления обрыва на сновальной машине, подчиняется экспоненциальному распределению с параметром $\lambda = 0{,}01c$. Определить какое время в среднем ожидается между смежными обрывами, и вероятность того, что оно не превысит 2 мин (120 с).

Эта вероятность составляет:

$$P(T < 120) = 1 - e^{-0{,}01 \cdot 120} = 1 - 0{,}301 = 0{,}699.$$

Поскольку $\overline{T} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}01} = 100$, то в среднем время между обрывами равно 100 с.