

Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный университет

М.В.Белодедов

**МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ
ФИЛЬТРОВ**

учебное пособие

Волгоград 2004

УДК 621.372.54

ББК 32.844

Б43

Рецензент: С.А.Прохоров, д.т.н., проф., каф. Информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета

Печатается по решению УМК факультета информационных технологий и телекоммуникаций ВолГУ

Б43 **Белодедов М.В.** Методы проектирования цифровых фильтров: Учебное пособие. – Волгоград: Издательство Волгоградского государственного университета, 2004. – 60 с.

ISBN

В пособии дается систематическое изложение основных методов проектирования цифровых фильтров. Для обоснования применения излагаемых методов рассматриваются свойства и методы анализа дискретных сигналов и дискретных систем. Теоретический материал подкреплен большим количеством практических примеров.

Пособие предназначено для студентов старших курсов технических специальностей, изучающих дисциплину «Цифровая обработка сигналов». Может оказаться также полезным при изучении дисциплин «Теория цепей и сигналов», «Теоретические основы радиотехники», «Теория электрической связи».

© Издательство Волгоградского
государственного университета, 2004

© М.В.Белодедов, 2004

Содержание

1. Дискретные сигналы и их основные свойства.	4
2. Цифровые фильтры.	12
3. Цифровые фильтры с сосредоточенными параметрами.	18
4. Структуры построения цифровых фильтров.	25
5. Проектирование цифровых фильтров методом взвешивания.	30
6. Проектирование цифровых фильтров методом частотной выборки	36
7. Методы отображения дифференциалов.	41
8. Метод инвариантного преобразования импульсной характеристики.	51
9. Подбор нулей и полюсов передаточной характеристики.	55
10. Литература	60

1. Дискретные сигналы и их основные свойства.

Подавляющее большинство сигналов, обрабатываемых современными техническими системами, так или иначе имеет цифровое представление, которое можно рассматривать с двух точек зрения. Во-первых, значение сигнала в данный конкретный момент времени, являясь по сути непрерывным, может быть воспринято любой обрабатывающей системой как одно из конечного набора значений. Наиболее часто встречающимся случаем подобного цифрового представления является преобразование непрерывного сигнала каким-либо АЦП. Такое цифровое представление непрерывного по сути значения сигнала принято называть *дискретизацией по уровню*. Во-вторых, информация о сигнале, зависящем, например, от времени (даже в том случае, если значения этого сигнала дискретизированы по уровню) не может быть предоставлена обрабатывающей системе в виде значений сигнала в каждый момент непрерывно изменяющегося времени. Обрабатывающая система может оперировать лишь конечным набором значений сигнала и такое представление непрерывно изменяющегося сигнала принято называть *дискретизацией по времени*. В большинстве практических применений уровни дискретизации значений сигнала выбираются равно отстоящими друг от друга и расстояние между ними называется *интервалом дискретизации по уровню*. Аналогично моменты дискретизации сигнала по времени выбираются обычно равно отстоящими друг от друга и расстояние между ними называется *интервалом дискретизации по времени*. Как правило, замена непрерывных значений сигнала дискретными уровнями может быть аналитически учтена добавлением в обрабатываемый сигнал равномерно распределенного в некотором интервале шума и не приводит к каким-либо неожиданным следствиям. Замена же непрерывно изменяющегося сигнала дискретным набором значений, напротив, приводит к ряду интересных эффектов, которые, собственно, и составляют предмет изучения теории цифровой обработки сигналов (digital signal processing).

Итак, далее мы будем рассматривать системы, обрабатывающие дискретный набор дискретных значений сигнала. Если обратиться к упомянутому АЦП, интервал дискретизации по уровню определяется разрядностью АЦП и уменьшается с увеличением разрядности, интервал же дискретизации по времени определяется частотой дискретизации АЦП и уменьшается с ее ростом. В приведенном примере изменение сигнала происходит с изменением времени и дискретный набор значений сигнала соответствует разным моментам времени. Большинство дискретных сигналов имеет именно такую природу. Следует учитывать, однако, что практический интерес могут иметь также сигналы, зависящие не от времени, а от какой-либо другой непрерывной величины, например, от пространственной координаты. Будем, тем не менее, в основном рассматривать сигналы, зависящие именно от времени и обозначать интервал дискретизации по времени символом Δ . Эффекты, связанные с дискретизацией по уровню, обычно учитывать не будем, предпола-

гая, что интервал дискретизации по уровню достаточно мал, чтобы считать эти эффекты пренебрежимо малыми.

Итак, определим дискретный сигнал как не более чем счетный (на практике, разумеется, конечный, но для удобства аналитического рассмотрения имеет смысл учесть вариант бесконечного числа отсчетов) набор величин, заданных в моменты времени $n\Delta$ и принимающих непрерывный (на практике, разумеется, дискретный) ряд значений. Для значения дискретного сигнала в n -ый момент времени введем обозначение x_n (эти значения будем далее называть *отсчетами* сигнала), а сам сигнал обозначим как \mathbf{x} . Назовем также *конечным* сигналом дискретный сигнал, имеющий конечное число отличных от нуля значений и *ограниченным* сигналом дискретный сигнал, сумма абсолютных значений отсчетов которого конечна, или, иными словами, тот сигнал \mathbf{x} , для которого сходящимся является ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|$. Примером

дискретного сигнала может служить сигнал \mathbf{x} , значения отсчетов которого определяются выражением $x_n = A \sin(\omega n\Delta)$. Такой сигнал имеет смысл называть гармоническим сигналом с амплитудой A и частотой ω . Частота ω иногда называется циклической частотой и имеет физический смысл «количество радиан в единицу времени» в отличие от обыкновенной частоты $f = \omega/(2\pi)$, имеющей смысл «количество периодов в единицу времени».

При рассмотрении непрерывных сигналов (теория цепей и сигналов, см., например, [С.И.Баскаков. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 1983, с.51.]), основополагающее значение имеет понятие спектра сигнала, определяемого выражением:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Понятие спектра дискретного сигнала легко ввести, если поставить ему в соответствие непрерывный сигнал, представляющий собой набор δ -функций, сосредоточенных в моменты времени $t = n\Delta$, и имеющих амплитуды $x_n\Delta$:

$$x_{непр.}(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t - n\Delta). \quad (1.1)$$

Спектром дискретного сигнала можно теперь назвать спектр соответствующего ему непрерывного сигнала:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{непр.}(t) e^{-j\omega t} dt = \Delta \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t - n\Delta) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta) e^{-j\omega t} dt = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n\Delta}. \end{aligned}$$

Множитель Δ в выражении (1.1) был введен единственно с той целью, чтобы определенные интегралы от непрерывного сигнала $x_{непр.}(t)$ не зависе-

ли от интервала дискретизации по времени. При неизменном интервале дискретизации этот множитель можно опустить. Будем, таким образом, называть *спектром дискретного сигнала* X величину:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n \Delta}. \quad (1.2)$$

Если отсчеты сигнала являются чисто действительными (а в большинстве случаев это действительно так), спектр является симметричной функцией:

$$X(-\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j\omega n \Delta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n (e^{-j\omega n \Delta})^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_n e^{-j\omega n \Delta})^* = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n \Delta} \right)^* = X^*(\omega),$$

где символом $*$ обозначена операция комплексного сопряжения.

Введенный таким образом спектр дискретного сигнала обладает таким неожиданным свойством, как периодичность. Действительно, вычислим значение спектра на частоте $\omega + 2\pi/\Delta$:

$$X(\omega + 2\pi/\Delta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j(\omega + 2\pi/\Delta)n\Delta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n \Delta} e^{-j2\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n \Delta} = X(\omega).$$

Как известно, спектры непрерывных сигналов не обладают периодичностью. Выявленная периодичность спектра присуща именно дискретным сигналам и обусловлена, вообще говоря, тем фактом, что само понятие частота определена для дискретного сигнала неоднозначно. Так, например, гармонический сигнал с частотой $\omega + 2\pi/\Delta$ совпадает с гармоническим сигналом с частотой ω :

$$A \sin((\omega + 2\pi/\Delta)n\Delta) = A \sin(\omega n \Delta + 2\pi n \Delta/\Delta) = A \sin(\omega n \Delta + 2\pi n) = A \sin(\omega n \Delta).$$

Если непрерывный сигнал имеет верхнюю граничную частоту ω_B , то есть сосредоточен в полосе частот $[-\omega_B \dots +\omega_B]$, то при его дискретизации с интервалом дискретизации Δ периодические повторы его спектра не будут накладываться друг на друга при выполнении условия $\Delta \leq \pi/\omega_B = 1/(2f_B)$. Сформулированное условие называется *условием Котельникова* (хотя за рубежом его чаще связывают с именем Найквиста) и обычно определяет частоту дискретизации непрерывных сигналов.

Вычислим спектр часто встречающегося *прямоугольного* сигнала

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{при } -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{при } |n| > N \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=-N}^N e^{-j\omega n \Delta} = \sum_{n=-N}^0 e^{-j\omega n \Delta} + \sum_{n=0}^N e^{-j\omega n \Delta} - 1 = \sum_{n=0}^N e^{j\omega n \Delta} + \sum_{n=0}^N e^{-j\omega n \Delta} - 1 = \\ &= \frac{1 - e^{j\omega(N+1)\Delta}}{1 - e^{j\omega\Delta}} + \frac{1 - e^{-j\omega(N+1)\Delta}}{1 - e^{-j\omega\Delta}} - 1 = \\ &= \frac{1 - e^{j\omega(N+1)\Delta} - e^{-j\omega\Delta} + e^{j\omega N \Delta} + 1 - e^{-j\omega(N+1)\Delta} - e^{j\omega\Delta} + e^{-j\omega N \Delta}}{(1 - e^{j\omega\Delta})(1 - e^{-j\omega\Delta})} - 1 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 - 2 \cos(\omega(N+1)\Delta) - 2 \cos(\omega\Delta) + 2 \cos(\omega N\Delta)}{2 - 2 \cos(\omega\Delta)} - 1 = \\
&= \frac{-\cos(\omega(N+1)\Delta) + \cos(\omega N\Delta)}{1 - \cos(\omega\Delta)} = 2 \frac{\sin \frac{\omega(2N+1)\Delta}{2} \sin \frac{\omega\Delta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\omega\Delta}{2}} = \frac{\sin \frac{\omega(2N+1)\Delta}{2}}{\sin \frac{\omega\Delta}{2}}.
\end{aligned}$$

Итак, спектр прямоугольного сигнала имеет вид:

$$X(\omega) = \frac{\sin(\omega(N+1/2)\Delta)}{\sin(\omega\Delta/2)}. \quad (1.3)$$

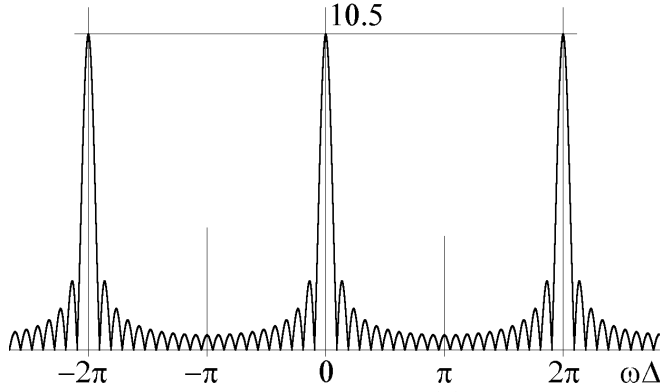


Рис.1. Форма модуля спектра (3) при $N = 10$.

Форма модуля спектра (1.3) при $N = 10$ показана на рис.1. Значение спектра на частоте $\omega = 0$ легко получить, вычисляя соответствующий предел функции (3). Нетрудно заметить, что вычисленный спектр обладает как симметрией, так и периодичностью.

Выражение (2) можно обратить, то есть выразить отсчеты

x_n через спектр $X(\omega)$. Для этого домножим обе части равенства (2) на $e^{j\omega n\Delta}$ и проинтегрируем по периоду $[-\pi/\Delta \dots \pi/\Delta]$:

$$\int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} X(\omega) e^{j\omega n\Delta} d\omega = \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n\Delta} e^{j\omega n\Delta} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} e^{j\omega(n'-n)\Delta} d\omega = \frac{2\pi}{\Delta} x_n.$$

При выводе последнего выражения использован тот общеизвестный

факт, что интеграл $\int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} e^{j\omega(n'-n)\Delta} d\omega$ равен $\frac{2\pi}{\Delta}$, если $n = n'$, и нулю в противном

случае. Окончательно отсчеты дискретного сигнала выражаются через его спектр следующим образом:

$$x_n = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} X(\omega) e^{j\omega n\Delta} d\omega. \quad (1.4)$$

Приблизительно столь же важное значение, как спектр (или преобразование Фурье) для непрерывных сигналов, для дискретных сигналов имеет так называемое z -преобразование. Оно определяется следующим образом:

$$Z[\mathbf{x}] = \mathbf{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}, \quad (1.5)$$

то есть дискретному сигналу \mathbf{x} ставится в соответствие комплексная функция $\mathbf{X}(z)$ комплексного аргумента z , представляющая собой степенной ряд [Г.Е.Шиллов. Математический анализ (функции одного переменного). – М.: Наука, 1969, с.238], коэффициентами которого являются отсчеты сигнала \mathbf{x} . Z -

преобразование сигнала \mathbf{X} может быть определено не на всей комплексной z -плоскости, та область плоскости, где оно определено, то есть ряд (1.5) сходится, называется *областью сходимости*. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Единичный сигнал \mathbf{e} : $e_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0; \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$

$$Z[\mathbf{e}] = \mathbf{E}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n z^{-n} = z^0 = 1.$$

Z -преобразование единичного сигнала тождественно равно единице, область сходимости – вся z -плоскость.

Пример 2. Экспоненциально убывающий (или нарастающий) сигнал:

$$\mathbf{x}: x_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n < 0; \\ a^n & \text{при } n \geq 0. \end{cases}$$

Его z -преобразование вычислим как сумму геометрической прогрессии:

$$Z[\mathbf{x}] = \mathbf{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

Приведенные вычисления справедливы только в том случае, если знаменатель прогрессии az^{-1} по абсолютному значению не превосходит единицы, в противном случае ряд (1.5) расходится, то есть функция $\mathbf{X}(z)$ определена только для z , удовлетворяющих условию $|z| > |a|$. Таким образом, область сходимости z -преобразования сигнала \mathbf{x} является часть комплексной z -плоскости, являющаяся внешней по отношению к окружности с центром в точке $z = 0$ и радиусом $|a|$.

Пример 3. Гармонический сигнал

$$\mathbf{x}: x_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n < 0; \\ A \sin(\omega n \Delta) & \text{при } n \geq 0. \end{cases}$$

Для вычисления z -преобразования представим синус в виде суммы экспонент: $\sin(\omega n \Delta) = (e^{j\omega n \Delta} - e^{-j\omega n \Delta}) / 2j$:

$$\begin{aligned} Z[\mathbf{x}] = \mathbf{X}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = \frac{A}{2j} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega n \Delta} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n \Delta} z^{-n} \right) = \\ &= \frac{A}{2j} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (e^{j\omega \Delta} z^{-1})^n - \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-j\omega \Delta} z^{-1})^n \right) = \frac{A}{2j} \left(\frac{1}{1 - e^{j\omega \Delta} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega \Delta} z^{-1}} \right) = \\ &= \frac{A}{2j} \frac{e^{j\omega \Delta} z^{-1} - e^{-j\omega \Delta} z^{-1}}{(1 - e^{j\omega \Delta} z^{-1})(1 - e^{-j\omega \Delta} z^{-1})} = Az^{-1} \frac{\sin(\omega \Delta)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega \Delta) + z^{-2}}. \end{aligned}$$

Область сходимости вычисленного z -преобразования – $|z| > 1$.

Пример 4. Рассмотрим абстрактный гармонический сигнал

$$\mathbf{x}: x_n = e^{j\omega_0 n \Delta},$$

который назван абстрактным, во-первых, потому, что, в отличие от предыдущих примеров, он не начинается в момент времени 0, а длится «всегда», от $n = -\infty$ до $n = \infty$, и, во-вторых, принимает комплексные значения, что на практике реализовано быть не может. Такие сигналы, тем не менее, играют большую роль в математическом анализе дискретных систем, поскольку все реальные сигналы можно представить в виде линейной комбинации рассматриваемых сигналов. Так, например,

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 n \Delta) &= (e^{j\omega_0 n \Delta} - e^{-j\omega_0 n \Delta}) / 2j, \\ \cos(\omega_0 n \Delta) &= (e^{j\omega_0 n \Delta} + e^{-j\omega_0 n \Delta}) / 2, \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Итак, найдем z -преобразование абстрактного гармонического сигнала:

$$\begin{aligned} Z[\mathbf{x}] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n \Delta} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 e^{j\omega_0 n \Delta} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega_0 n \Delta} z^{-n} - 1 = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega_0 n \Delta} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega_0 n \Delta} z^{-n} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-j\omega_0 \Delta} z)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (e^{j\omega_0 \Delta} z^{-1})^n - 1 = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0 \Delta} z} + \frac{1}{1 - e^{j\omega_0 \Delta} z^{-1}} - 1. \end{aligned}$$

Анализируя последнее выражение, нетрудно убедиться, что оно равно нулю практически везде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0 \Delta} z} + \frac{1}{1 - e^{j\omega_0 \Delta} z^{-1}} - 1 &= \frac{1 - e^{j\omega_0 \Delta} z^{-1} + 1 - e^{-j\omega_0 \Delta} z}{(1 - e^{-j\omega_0 \Delta} z)(1 - e^{j\omega_0 \Delta} z^{-1})} - 1 = \\ &= \frac{2 - e^{j\omega_0 \Delta} z^{-1} - e^{-j\omega_0 \Delta} z}{2 - e^{j\omega_0 \Delta} z^{-1} - e^{-j\omega_0 \Delta} z} - 1 = 0, \end{aligned}$$

за исключением точки $z = e^{j\omega_0 \Delta}$, где оно обращается в бесконечность. Этот факт дает основание объявить искомое z -преобразование δ -функцией:

$$Z[\mathbf{x}: x_n = e^{j\omega_0 n \Delta}] = \delta(z - e^{j\omega_0 \Delta}). \quad (1.6)$$

Вообще говоря, это не совсем правильно, поскольку полученную δ -функцию можно без каких-либо последствий умножить на любую константу. Поиск точного значения этой константы представляет собой достаточно сложную математическую задачу, поэтому в дальнейшем будем использовать выражение (1.6) либо в представленном виде, либо с неопределенной константой: $Z[\mathbf{x}: x_n = e^{j\omega_0 n \Delta}] = C \delta(z - e^{j\omega_0 \Delta})$.

Рассмотрим основные свойства z -преобразования.

1) Как это следует непосредственно из определения и уже было использовано в примере 3, z -преобразование линейно, то есть

$$Z[a\mathbf{x} + b\mathbf{y}] = Z[a\mathbf{x}] + Z[b\mathbf{y}] = aZ[\mathbf{x}] + bZ[\mathbf{y}].$$

2) Z -преобразование задержанного сигнала. Пусть сигнал \mathbf{y} представляет собой задержанный на один отсчет сигнал \mathbf{x} , то есть $y_n = x_{n-1}$. Тогда

$$Z[\mathbf{y}] = \mathbf{Y}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{n-1} z^{-1} z^{-(n-1)} = z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = z^{-1} \mathbf{X}(z) = z^{-1} Z[\mathbf{x}], \quad (1.7)$$

то есть z -преобразование задержанного на один отсчет сигнала получается из z -преобразования исходного сигнала путем умножения его на z^{-1} . Легко по-

казать, что задержка на N отсчетов приводит к умножению z -преобразования на z^{-N} .

3) Z -преобразование свертки сигналов. Рассмотрим свертку дискретных сигналов:

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} : \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x_{n'} y_{n-n'}$$

которая является дистрибутивной операцией, то есть не изменяется при перестановке операндов:

$$\sum_{n'=-\infty}^{\infty} x_{n'} y_{n-n'} = \sum_{n''=-\infty}^{\infty} x_{n-n''} y_{n''} = \sum_{n-n''=-\infty}^{\infty} x_{n-n''} y_{n''} = \sum_{n''=-\infty}^{\infty} x_{n-n''} y_{n''} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x_{n-n'} y_{n'} : \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}.$$

Вычислим z -преобразование свертки:

$$\begin{aligned} Z[\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x_{n'} y_{n-n'} z^{-n} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{n'} y_{n-n'} z^{-n} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x_{n'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_{n-n'} z^{-n} = \\ &= \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x_{n'} z^{-n'} Y(z) = Y(z) \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x_{n'} z^{-n'} = Y(z) X(z) = Z[\mathbf{x}] Z[\mathbf{y}]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Таким образом, z -преобразование свертки двух сигналов представляет собой произведение z -преобразований сигналов, входящих в свертку.

4) Связь z -преобразования со спектром сигнала.

Спектр дискретного сигнала (1.2) легко может быть получен из его z -преобразования:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n \Delta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \Big|_{z=e^{j\omega \Delta}} = \mathbf{X}(z) \Big|_{z=e^{j\omega \Delta}}, \quad (1.9)$$

то есть спектр сигнала представляет собой значения его z -преобразования, взятые в точках $z = e^{j\omega \Delta}$, которые лежат на окружности единичного радиуса, причем параметр $\omega \Delta$ является полярным углом точки на окружности. Сделанный вывод в очередной раз свидетельствует, что спектр дискретного сигнала обязан быть периодичным с периодом $2\pi/\Delta$.

На этом этапе рассуждений полезно вновь обратиться к примеру 2 и рассмотреть его с новой точки зрения. При $|a| < 1$ единичная окружность лежит в области сходимости z -преобразования и поэтому функция $\mathbf{X}(z)$ определена в каждой ее точке, то есть определен и спектр исходного сигнала. Если же $|a| > 1$, то единичная окружность лежит вне области сходимости и спектр сигнала не определен, что легко понять, поскольку в этом случае сам дискретный сигнал не является ограниченным.

Контрольные вопросы и задачи.

1. Какова максимальная погрешность при дискретизации непрерывного сигнала, принимающего значения в диапазоне $(-1) \div (+1)$ В, 12-разрядным АЦП?

2. Непрерывной или дискретной функцией частоты является спектр дискретного сигнала (1.2)?

3. Вычислите максимально возможный интервал дискретизации при дискретизации сигнала с полосой частот $(20 \text{ Гц} \div 20 \text{ кГц})$.

4. Вычислите спектр дискретного сигнала:

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq n \leq N; \\ 0 & \text{при } n < 0, n > N. \end{cases}$$

5. Исследуйте, как различаются дискретные спектры одного и того же сигнала, отсчеты которого взяты с разными интервалами дискретизации:

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta)e^{-j\omega n\Delta}; \\ X_2(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n \times 2\Delta)e^{-j\omega n \times 2\Delta}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

6. Вычислите z-преобразование сигнала с 4 отличными от нуля отсчетами: $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 0,5, x_3 = 0,25$. Какова область сходимости этого z-преобразования?

7. Вычислите z-преобразование сигнала:

$$\mathbf{x}: x_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n < 0; \\ A \cos(\omega n \Delta) & \text{при } n \geq 0. \end{cases}$$

Сравните полученный результат с примером 3.

8. Вычислите z-преобразование сигнала x_{2n} , считая известным z-преобразование сигнала x_n .

9. Вычислите z-преобразование сигнала:

$$\mathbf{x}: x_n = \begin{cases} 1 & \text{при четных } n; \\ -1 & \text{при нечетных } n. \end{cases}$$

10. Обладает ли свойством симметрии спектр дискретного сигнала, отсчеты которого принимают комплексные значения?

2. Цифровые фильтры.

Начнем теперь рассмотрение систем, выполняющих обработку дискретных сигналов. По аналогии с непрерывными системами их логично называть фильтрами. В настоящее время такие системы принято называть *цифровыми фильтрами* (digital filters). Обработка сигнала в самом общем случае может быть выражена как некоторый алгоритм, или закон, позволяющий по заданному входному сигналу \mathbf{x} получить выходной сигнал \mathbf{y} . Этот алгоритм удобно выразить соотношением:

$$\mathbf{y} = \hat{L}[\mathbf{x}],$$

где через \hat{L} обозначен оператор, отображающий пространство дискретных сигналов само на себя и присущий данному конкретному цифровому фильтру.

Будем рассматривать далее *линейные* фильтры, то есть фильтры, реакция которых (выходной сигнал) на сумму двух входных может быть представлена как сумма его реакций на отдельные составляющие входного сигнала:

$$\hat{L}[a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2] = \hat{L}[a\mathbf{x}_1] + \hat{L}[b\mathbf{x}_2] = a\hat{L}[\mathbf{x}_1] + b\hat{L}[\mathbf{x}_2].$$

Кроме того, выделим в отдельную группу фильтры, реакция которых на сдвинутый по времени сигнал представляет собой сдвинутую по времени на такую же величину реакцию фильтра на несдвинутый сигнал:

$$\text{Если } \tilde{x}_n = x_{n-N} \text{ и } \hat{L}[\mathbf{x}] = \mathbf{y},$$

$$\text{то } \hat{L}[\tilde{\mathbf{x}}] = \tilde{\mathbf{y}} : y_{n-N}.$$

Такие фильтры будем называть *инвариантными*. Для дискретных сигналов, отсчеты которых относятся к разным моментам времени, требование инвариантности является естественным и не требующим специального постулирования. Это связано с тем фактом, что время, как правило, не имеет выделенной точки отсчета. Существуют, однако, такие дискретные системы, в которых требование инвариантности далеко не так естественно. Такие системы встречаются, например, в случае, если отсчеты дискретного сигнала относятся не к различным моментам времени, а к различным точкам пространства.

Далее мы будем рассматривать линейные инвариантные фильтры. Именно для таких фильтров удастся получить ряд достаточно интересных выводов, оказывающихся весьма полезными при анализе и синтезе дискретных систем.

Рассмотрим воздействие на линейный инвариантный фильтр единичного сигнала \mathbf{e} . Обозначим выходной сигнал фильтра при таком воздействии как \mathbf{h} и будем называть его *импульсной характеристикой*:

$$\hat{L}[\mathbf{e}] = \mathbf{h}.$$

Для линейных инвариантных фильтров импульсная характеристика полностью характеризует фильтр. Чтобы показать это, представим произвольный входной сигнал как его свертку с самим собой:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{e} : x_n = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} e_{n'} x_{n-n'} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} e_{n-n'} x_{n'} .$$

В последнем выражении величины $x_{n'}$ являются просто числами (не сигналами), поэтому воздействие линейного инвариантного цифрового фильтра на входной сигнал может быть записано следующим образом:

$$\hat{L}[\mathbf{x}] = \mathbf{y} : y_n = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h_{n-n'} x_{n'} ,$$

то есть выходной сигнал линейного инвариантного фильтра может быть выражен как свертка входного сигнала и импульсной характеристики:

$$\mathbf{y} = \hat{L}[\mathbf{x}] = \mathbf{x} \otimes \mathbf{h} . \quad (2.1)$$

Реальные цифровые фильтры, обрабатывающие временные дискретные сигналы, должны отвечать принципу причинности, запрещающему выходному сигналу принимать отличные от нуля значения до прихода первого ненулевого отсчета входного сигнала. Такие фильтры будем называть *каузальными* фильтрами, их импульсная характеристика должна подчиняться требованию:

$$h_n = 0 \text{ при } n < 0 . \quad (2.2)$$

Отметим, что требование каузальности, столь естественное для временных фильтров, совершенно не имеет места, например, при рассмотрении дискретных сигналов, описывающих пространственные распределения какой-либо величины.

Воспользуемся теперь одним из рассмотренных свойств z -преобразования и выполним z -преобразование обеих частей равенства (2.1):

$$Z[\mathbf{y}] = \mathbf{Y}(z) = Z[\mathbf{x} \otimes \mathbf{h}] = Z[\mathbf{x}]Z[\mathbf{h}] = \mathbf{X}(z)\mathbf{H}(z) .$$

Таким образом, z -преобразование выходного сигнала фильтра может быть получено из z -преобразования входного сигнала путем домножения его на функцию $\mathbf{H}(z)$, которая носит название *передаточная характеристика* цифрового фильтра. По определению, передаточная характеристика равна z -преобразованию импульсной характеристики. Подчеркнем, что передаточной характеристикой обладают только линейные инвариантные фильтры.

При рассмотрении непрерывных сигналов и непрерывных фильтров важную роль играет *частотная характеристика*, определяемая как отношение амплитуд входного и выходного сигналов фильтра при воздействии на него гармоническим сигналом определенной частоты. Определим подобным же образом частотную характеристику цифрового фильтра. Подадим на вход линейного инвариантного фильтра абстрактный гармонический сигнал $x_n = Ae^{j\omega_0 n\Delta}$. Выходной сигнал фильтра легко вычислить:

$$\mathbf{X}(z) = A\delta(z - e^{j\omega_0\Delta}) ;$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{X}(z)\mathbf{H}(z) = A\delta(z - e^{j\omega_0\Delta})\mathbf{H}(z) = A\mathbf{H}(e^{j\omega_0\Delta})\delta(z - e^{j\omega_0\Delta}) ;$$

$$y_n = A\mathbf{H}(e^{j\omega_0\Delta})e^{j\omega_0 n\Delta} ,$$

и он также является гармоническим сигналом, причем отношение амплитуд выходного и входного сигнала определяется значением передаточной характеристики фильтра в точке единичной окружности, соответствующей частоте входного сигнала. Итак, частотная характеристика линейного инвариантного цифрового фильтра равна значению передаточной характеристики фильтра в соответствующей точке:

$$H(\omega) = \mathbf{H}(z) \Big|_{z=e^{j\omega\Delta}}.$$

Определенная таким образом частотная характеристика совпадает со спектром импульсной характеристики, как это и имеет место в случае непрерывных систем:

$$H(\omega) = \mathbf{H}(z) \Big|_{z=e^{j\omega_0\Delta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n} \Big|_{z=e^{j\omega_0\Delta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-j\omega_0 n \Delta}.$$

Рассмотрим в качестве примера цифровой фильтр, осуществляющий численное дифференцирование входного сигнала и работающий по следующему алгоритму: $y_n = (x_n - x_{n-1})/\Delta$. Для вычисления передаточной характеристики фильтра выполним z -преобразование последнего равенства:

$$\mathbf{Y}(z) = (\mathbf{X}(z) - z^{-1}\mathbf{X}(z))/\Delta = \mathbf{X}(z) \frac{1 - z^{-1}}{\Delta},$$

откуда:

$$\mathbf{H}(z) = \frac{\mathbf{Y}(z)}{\mathbf{X}(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta}.$$

Зная передаточную характеристику, найдем частотную характеристику:

$$H(\omega) = \mathbf{H}(z) \Big|_{z=e^{j\omega\Delta}} = \frac{1 - e^{-j\omega\Delta}}{\Delta},$$

используя которую, можно по формуле (1.4) вычислить отсчеты импульсной характеристики:

$$h_0 = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} H(\omega) d\omega = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} \frac{1 - e^{-j\omega\Delta}}{\Delta} d\omega = \frac{1}{\Delta};$$

$$h_1 = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} H(\omega) e^{j\omega\Delta} d\omega = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} \frac{e^{j\omega\Delta} - 1}{\Delta} d\omega = -\frac{1}{\Delta};$$

$$h_2 = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} H(\omega) e^{2j\omega\Delta} d\omega = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} \frac{e^{2j\omega\Delta} - e^{j\omega\Delta}}{\Delta} d\omega = 0;$$

$$h_3 = 0; \quad h_4 = 0; \quad \dots$$

Таким образом, только два отсчета импульсной характеристики рассматриваемого фильтра отличны от нуля. Этот же результат можно было получить, проанализировав реакцию фильтра на единичный сигнал:

$$h_n = \frac{(e_n - e_{n-1})}{\Delta};$$

$$h_0 = \frac{(e_0 - e_{-1})}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}; \quad h_1 = \frac{(e_1 - e_0)}{\Delta} = -\frac{1}{\Delta}; \quad h_2 = \frac{(e_2 - e_1)}{\Delta} = 0; \quad h_3 = 0; \quad h_4 = 0; \quad \dots$$

Рассмотрим теперь каузальный линейный инвариантный цифровой фильтр. Для него передаточная характеристика запишется несколько более простым образом:

$$\mathbf{H}(z) = Z[\mathbf{h}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n} . \quad (2.3)$$

Поскольку выражение (2.3) является степенным рядом [Г.Е.Шилов. Математический анализ (функции одного переменного). – М.: Наука, 1969, с.239], существует некий радиус его сходимости R , при этом ряд (2.3) сходится во всех точках z -плоскости, для которых $|z| > R$, и расходится во всех точках с $|z| < R$. Можно, поэтому, утверждать, что, если передаточная характеристика не определена в какой-либо точке $z = p$, она не определена также во всех точках $|z| < |p|$.

Пример 5. Пусть цифровой фильтр имеет импульсную характеристику

$$h_n = \begin{cases} a^n & \text{при } n \geq 0; \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Передаточная характеристика такого фильтра имеет вид (см. пример 2):

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} .$$

Последнее выражение не определено в точке $z = a$. Из этого следует, что передаточная характеристика не определена также во всех точках $|z| < |a|$, как это уже отмечалось в примере 2. При воздействии на фильтр произвольным сигналом \mathbf{X} z -преобразование выходного сигнала $\mathbf{Y}(z)$ также не будет определено в точках $|z| < |a|$. Если $|a| > 1$, то $\mathbf{Y}(z)$ не будет определено и на единичной окружности, следовательно, выходной сигнал не будет иметь спектра и не будет ограниченным.

Будем называть *устойчивыми* цифровыми фильтрами такие фильтры, выходной сигнал которых при ограниченном входном сигнале также является ограниченным. Поскольку при перемножении двух z -преобразований область сходимости может только уменьшаться, нетрудно показать, что необходимым и достаточным условием устойчивости является требование $R < 1$, где R – радиус сходимости передаточной характеристики цифрового фильтра.

Рассмотренный в примере 5 цифровой фильтр является устойчивым при $|a| < 1$ и неустойчивым в противном случае.

Напомним, что полученные результаты касаются только каузальных цифровых фильтров и применение их к некаузальным фильтрам требует осмотрительности.

Как для преобразования Фурье существует обратное преобразование, так его имеет и z -преобразование:

$$x_n = \oint \mathbf{X}(z) z^{n-1} dz , \quad (2.4)$$

где контур интегрирования лежит в области сходимости и охватывает точку $z = 0$.

На практике применение формулы (2.4) приводит к громоздким выкладкам. Как правило, вычислить обратное z -преобразование обычно удается более простыми способами.

Пример 6. Вычислим реакцию цифрового фильтра с каузальной импульсной характеристикой $h_n = a^n \sin(\omega_0 n \Delta)$ на гармонический сигнал $x_n = b^n$, начинающийся в момент времени 0.

Поскольку импульсную характеристику можно представить в виде:

$$h_n = a^n \frac{e^{j\omega_0 n \Delta} - e^{-j\omega_0 n \Delta}}{2j} = \frac{1}{2j} (ae^{j\omega_0 \Delta})^n - \frac{1}{2j} (ae^{-j\omega_0 \Delta})^n,$$

легко найти передаточную характеристику фильтра:

$$H(z) = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{1 - ae^{j\omega_0 \Delta} z^{-1}} - \frac{1}{1 - ae^{-j\omega_0 \Delta} z^{-1}} \right].$$

Зная передаточную характеристику и z -преобразование входного сигнала:

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}},$$

найдем z -преобразование выходного сигнала фильтра:

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{1 - ae^{j\omega_0 \Delta} z^{-1}} - \frac{1}{1 - ae^{-j\omega_0 \Delta} z^{-1}} \right] \frac{1}{1 - bz^{-1}} = \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{1 - ae^{j\omega_0 \Delta} z^{-1}} \frac{1}{1 - bz^{-1}} - \frac{1}{1 - ae^{-j\omega_0 \Delta} z^{-1}} \frac{1}{1 - bz^{-1}} \right]. \end{aligned}$$

Пользуясь стандартной методикой, представим произведение дробей в виде их суммы:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{2j} \left[\frac{ae^{j\omega_0 \Delta}}{ae^{j\omega_0 \Delta} - b} \frac{1}{1 - ae^{j\omega_0 \Delta} z^{-1}} - \frac{b}{ae^{j\omega_0 \Delta} - b} \frac{1}{1 - bz^{-1}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{ae^{-j\omega_0 \Delta}}{ae^{-j\omega_0 \Delta} - b} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega_0 \Delta} z^{-1}} + \frac{b}{ae^{-j\omega_0 \Delta} - b} \frac{1}{1 - bz^{-1}} \right]. \end{aligned}$$

Каждое слагаемое в полученном выражении представляет собой z -преобразование показательной последовательности из примера 5, поэтому выполнить обратное z -преобразование очень легко:

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{2j} \left[\frac{ae^{j\omega_0 \Delta}}{ae^{j\omega_0 \Delta} - b} a^n e^{j\omega_0 n \Delta} - \frac{b}{ae^{j\omega_0 \Delta} - b} b^n - \frac{ae^{-j\omega_0 \Delta}}{ae^{-j\omega_0 \Delta} - b} a^n e^{-j\omega_0 n \Delta} + \frac{b}{ae^{-j\omega_0 \Delta} - b} b^n \right] = \\ &= \frac{1}{2j} \left[a^{n+1} \left(\frac{e^{j\omega_0 (n+1)\Delta}}{ae^{j\omega_0 \Delta} - b} - \frac{e^{-j\omega_0 (n+1)\Delta}}{ae^{-j\omega_0 \Delta} - b} \right) + b^{n+1} \left(\frac{1}{ae^{-j\omega_0 \Delta} - b} - \frac{1}{ae^{j\omega_0 \Delta} - b} \right) \right] = \\ &= \frac{a \sin(\omega_0 \Delta) (a^{n+1} + b^{n+1}) - a^{n+1} b \sin(\omega_0 (n+1)\Delta)}{a^2 - 2ab \cos(\omega_0 \Delta) + b^2}. \end{aligned}$$

Полученное выражение справедливо только при $n \geq 0$. При $n < 0$, как это следует из примера 5, отсчеты выходного сигнала должны иметь нулевое значение.

Таким образом, путем не очень сложных выкладок нам удалось получить точный вид выходного сигнала рассматриваемого фильтра. Интересно отметить, что, несмотря на обилие комплекснозначных промежуточных результатов, выходной сигнал оказывается чисто действительным, каким он, собственно, и должен быть при действительном входном сигнале и действительной импульсной характеристике.

Контрольные вопросы и задачи.

1. Чему равна импульсная характеристика цифрового фильтра, задерживающего входной сигнал на N отсчетов: $y_n = x_{n-N}$? Обладает ли она свойствами инвариантности и каузальности?

2. Может ли цифровой фильтр обладать симметричной импульсной характеристикой: $h_{-n} = h_n$?

3. Найдите импульсную характеристику цифрового фильтра $y_n = (x_n - 2x_{n-1} - x_{n-2})/\Delta^2$.

4. Найдите импульсную характеристику цифрового фильтра $y_n = (x_n + x_{n-1})^2$.

5. Найдите импульсную характеристику цифрового фильтра $y_n = x_n/n$.

6. Возможен ли цифровой фильтр с передаточной характеристикой $H(z) = 1 + z^2 + z^{-2}$?

7. Найдите импульсную характеристику цифрового фильтра с передаточной характеристикой $H(z) = \frac{z^2}{1 + 2z^2}$.

8. Является ли устойчивым цифровой фильтр с передаточной характеристикой $H(z) = \frac{z^2}{1 + 2z^2}$?

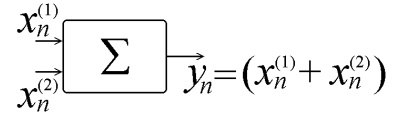
9. Два цифровых фильтра с каузальными импульсными характеристиками $h_n^{(1)} = a^n$ и $h_n^{(2)} = b^n$ соединяются последовательно – выход первого подключается ко входу второго. Найдите импульсную характеристику получившегося цифрового фильтра.

10. Возможен ли цифровой фильтр с областью сходимости $R_1 < |z| < R_2$?

3. Цифровые фильтры с сосредоточенными параметрами.

Рассмотрим отдельные элементы, являющиеся «строительным набором» для построения цифровых фильтров.

1. Сумматор – устройство с двумя (или более) входами и одним выходом. Выходной сигнал представляет собой сумму двух входных:



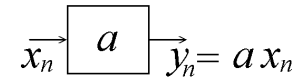
$$\mathbf{y} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}.$$

Сумматор является линейным устройством, поскольку если $\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}$ и $\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{x}^{(3)} + \mathbf{x}^{(4)}$ то

$$\mathbf{y} = a(\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}) + b(\mathbf{x}^{(3)} + \mathbf{x}^{(4)}) = a\mathbf{y}^{(1)} + b\mathbf{y}^{(2)}.$$

Так же без каких-либо затруднений можно показать, что сумматор является инвариантной системой.

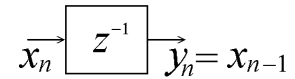
2. Умножитель на коэффициент. Выходной сигнал представляет собой входной, умноженный на некоторый, как правило, действительный, коэффициент:



$$\mathbf{y} = a\mathbf{x}.$$

Умножитель также является линейным инвариантным устройством. Его передаточная характеристика определена на всей z -плоскости и равна коэффициенту a : $\mathbf{H}(z) = a$.

3. Элемент задержки. Выходной сигнал представляет собой входной, задержанный на один отсчет:



$$y_n = x_{n-1}.$$

Такой элемент, конечно, линеен и инвариантен. Как уже было показано, его передаточная характеристика равна выражению: $\mathbf{H}(z) = z^{-1}$ и определена везде, за исключением точки $z = 0$.

Рассмотренные элементы являются линейными, инвариантными и каузальными. Поэтому этими же качествами будет обладать любая их комбинация, то есть такое соединение, при котором выходы одних элементов подключаются ко входам других.

Будем называть устройство, представляющее собой комбинацию конечного числа элементов рассмотренных трех типов, *цифровым фильтром с сосредоточенными параметрами*. Рассмотрим вопрос о передаточной характеристике фильтра с сосредоточенными параметрами с одним входом \mathbf{X} и одним выходом \mathbf{y} . Обозначим выходные сигналы элементов задержки, входящих в состав фильтра, символами $\mathbf{q}^{(k)}$. Так как на вход этих элементов задержки может поступать только линейная комбинация других сигналов $\mathbf{q}^{(k)}$ и, возможно, входного сигнала \mathbf{x} , можно записать:

$$q_n^{(k)} = \sum_{m=1}^K a_{k,m} q_{n-1}^{(m)} + b_k x_{n-1}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Выходной сигнал фильтра, конечно, также будет определяться линейной комбинацией этих же сигналов:

$$y_n = \sum_{m=1}^K a_{0,m} q_n^{(m)} + b_0 x_n. \quad (3.1a)$$

В n -ый момент времени состояние фильтра полностью определяется набором параметров $q_n^{(1)}, \dots, q_n^{(K)}$, то есть вектором в K -мерном пространстве. По этой причине разбираемый метод анализа цифровых фильтров с сосредоточенными параметрами обычно называется *методом пространства состояний*.

Выполним z -преобразование выражений (3.1) и (3.1a):

$$\mathbf{Q}^{(k)}(z) = \sum_{m=1}^K a_{k,m} z^{-1} \mathbf{Q}^{(m)}(z) + b_k z^{-1} \mathbf{X}(z), \quad k = 1, \dots, K; \quad (3.2)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \sum_{m=1}^K a_{0,m} \mathbf{Q}^{(m)}(z) + b_0 \mathbf{X}(z). \quad (3.2a)$$

Полученное выражение (3.2) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно неизвестных $\mathbf{Q}^{(k)}(z)$:

$$\begin{cases} (a_{1,1}z^{-1} - 1)\mathbf{Q}^{(1)} + a_{1,2}z^{-1}\mathbf{Q}^{(2)} + a_{1,3}z^{-1}\mathbf{Q}^{(3)} + \dots + a_{1,K}z^{-1}\mathbf{Q}^{(K)} = -b_1z^{-1}\mathbf{X} \\ a_{2,1}z^{-1}\mathbf{Q}^{(1)} + (a_{2,2}z^{-1} - 1)\mathbf{Q}^{(2)} + a_{2,3}z^{-1}\mathbf{Q}^{(3)} + \dots + a_{2,K}z^{-1}\mathbf{Q}^{(K)} = -b_2z^{-1}\mathbf{X} \\ a_{3,1}z^{-1}\mathbf{Q}^{(1)} + a_{3,2}z^{-1}\mathbf{Q}^{(2)} + (a_{3,3}z^{-1} - 1)\mathbf{Q}^{(3)} + \dots + a_{3,K}z^{-1}\mathbf{Q}^{(K)} = -b_3z^{-1}\mathbf{X} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{K,1}z^{-1}\mathbf{Q}^{(1)} + a_{K,2}z^{-1}\mathbf{Q}^{(2)} + a_{K,3}z^{-1}\mathbf{Q}^{(3)} + \dots + (a_{K,K}z^{-1} - 1)\mathbf{Q}^{(K)} = -b_Kz^{-1}\mathbf{X} \end{cases} \quad (3.3)$$

Определитель системы (3.3) является полиномом степени не меньше K аргумента z^{-1} : $P_0(z^{-1})$, а ее общее решение имеет вид:

$$\mathbf{Q}^{(k)}(z) = \frac{P_k(z^{-1})}{P_0(z^{-1})} \mathbf{X}(z), \quad k = 1, \dots, K, \quad (3.4)$$

где $P_k(z^{-1})$ – также полином аргумента z^{-1} степени не меньше K . Полученное решение (3.4) позволяет выписать *парциальные передаточные характеристики* фильтра:

$$\mathbf{H}^{(k)}(z) = \frac{\mathbf{Q}^{(k)}(z)}{\mathbf{X}(z)} = \frac{P_k(z^{-1})}{P_0(z^{-1})}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (3.5)$$

и найти z -преобразование выходного сигнала фильтра (используя соотношение (3.2a)):

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(z) &= \sum_{m=1}^K a_{0,m} \mathbf{Q}^{(m)}(z) + b_0 \mathbf{X}(z) = \sum_{m=1}^K a_{0,m} \frac{P_m(z^{-1})}{P_0(z^{-1})} \mathbf{X}(z) + b_0 \mathbf{X}(z) = \\ &= \frac{\mathbf{X}(z)}{P_0(z^{-1})} \left(\sum_{m=1}^K a_{0,m} P_m(z^{-1}) + b_0 P_0(z^{-1}) \right) = \mathbf{X}(z) \frac{P_Y(z^{-1})}{P_0(z^{-1})}, \end{aligned}$$

где степень полинома $P_Y(z^{-1})$, опять-таки, не превосходит K .

Полученный результат позволяет сформулировать важное заключение: Передаточная характеристика цифрового фильтра с сосредоточенными параметрами представляет собой отношение двух полиномов (вообще говоря, разных степеней) аргумента z^{-1} :

$$\mathbf{H}(z) = \frac{\mathbf{Y}(z)}{\mathbf{X}(z)} = \frac{P_Y(z^{-1})}{P_0(z^{-1})}, \quad (3.6)$$

то есть является дробно-рациональной функцией аргумента z^{-1} .

Каждый из полиномов, входящих в выражение (3.6), имеет собственный набор корней и соответствующий ему набор коэффициентов:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z) &= C \frac{(z^{-1} - z_1^{-1})(z^{-1} - z_2^{-1}) \dots (z^{-1} - z_N^{-1})}{(z^{-1} - p_1^{-1})(z^{-1} - p_2^{-1}) \dots (z^{-1} - p_M^{-1})} = \\ &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_{N-1} z^{-(N-1)} + \alpha_N z^{-N}}{1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_{N-1} z^{-(M-1)} + \beta_M z^{-M}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

причем следует отметить, что, если коэффициенты умножителей, входящих в состав фильтра с сосредоточенными параметрами, являются чисто действительными, то также чисто действительными являются коэффициенты обоих полиномов, и, следовательно, их корни либо чисто действительны, либо образуют комплексно сопряженные пары.

Легко заметить, что при равенстве аргумента z одному из корней числителя передаточной характеристики (3.7) $z = z_k$ сама характеристика принимает нулевое значение. По этой причине величины z_k принято называть *нулями* передаточной характеристики. Аналогично, при равенстве аргумента z одному из корней знаменателя характеристики $z = p_k$ нулевое значение принимает знаменатель, а сама передаточная характеристика обращается в бесконечность. Величины p_k поэтому называются *полюсами* передаточной характеристики фильтра. Коэффициенты передаточной характеристики (3.7) легко выразить через ее нули и полюсы, используя симметрические полиномы [Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике. – М.: Наука, 1968, с.38]. Так, например, для $K = 5$ эти коэффициенты выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -z_1^{-1} z_2^{-1} z_3^{-1} z_4^{-1} z_5^{-1}; \\ \alpha_1 &= z_2^{-1} z_3^{-1} z_4^{-1} z_5^{-1} + z_1^{-1} z_3^{-1} z_4^{-1} z_5^{-1} + z_1^{-1} z_2^{-1} z_4^{-1} z_5^{-1} + z_1^{-1} z_2^{-1} z_3^{-1} z_5^{-1} + z_1^{-1} z_2^{-1} z_3^{-1} z_4^{-1}; \\ \alpha_2 &= -z_3^{-1} z_4^{-1} z_5^{-1} - z_2^{-1} z_4^{-1} z_5^{-1} - z_2^{-1} z_3^{-1} z_5^{-1} - z_2^{-1} z_3^{-1} z_4^{-1} - z_1^{-1} z_4^{-1} z_5^{-1} - \\ &\quad - z_1^{-1} z_3^{-1} z_5^{-1} - z_1^{-1} z_3^{-1} z_4^{-1} - z_1^{-1} z_2^{-1} z_5^{-1} - z_1^{-1} z_2^{-1} z_4^{-1} - z_1^{-1} z_2^{-1} z_3^{-1}; \\ \alpha_3 &= z_4^{-1} z_5^{-1} + z_3^{-1} z_5^{-1} + z_3^{-1} z_4^{-1} + z_2^{-1} z_5^{-1} + z_2^{-1} z_4^{-1} + \\ &\quad + z_2^{-1} z_3^{-1} + z_1^{-1} z_5^{-1} + z_1^{-1} z_4^{-1} + z_1^{-1} z_3^{-1} + z_1^{-1} z_2^{-1}; \\ \alpha_4 &= -z_1^{-1} - z_2^{-1} - z_3^{-1} - z_4^{-1} - z_5^{-1}. \end{aligned}$$

Обратная задача – вычисление корней полинома по его коэффициентам – несравненно сложнее и общего решения не имеет. Как будет показано в дальнейшем, этот факт сильно усложняет исследование цифровых фильтров на устойчивость.

Пример 7. Схема цифрового фильтра, работа которого определяется уравнением $y_n = x_{n-5}$ приведена на рис.2а. Его передаточная характеристика имеет вид:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-5} X(z)}{X(z)} = z^{-5},$$

ее нули легко найти из уравнения $z^{-5} = 0$:

$$z_1 = 1;$$

$$z_2 = e^{j2\pi/5}; \quad z_3 = e^{-j2\pi/5};$$

$$z_4 = e^{j4\pi/5}; \quad z_5 = e^{-j4\pi/5}.$$

Все нули передаточной характеристики лежат на единичной окружности, их взаимное расположение показано на рис.2б.

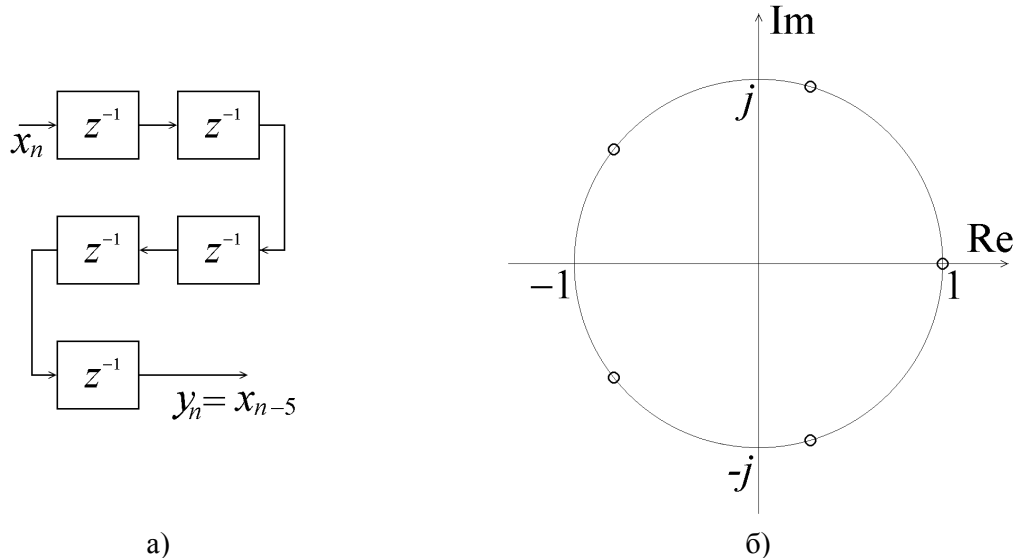


Рис.2. Схема (а) и расположение нулей передаточной характеристики (б) цифрового фильтра $y_n = x_{n-5}$.

Как уже отмечалось ранее, если передаточная характеристика каузального цифрового фильтра не определена в какой-либо точке z -плоскости z_0 , то она не определена также и во всех точках, удовлетворяющих условию $|z| < |z_0|$. Из этого следует, что передаточная характеристика каузального фильтра с сосредоточенными параметрами (3.7) не определена внутри окружности $|z| < R$, где R – максимальное абсолютное значение полюса передаточной характеристики (3.7). Поэтому цифровой каузальный фильтр с сосредоточенными параметрами будет являться устойчивым тогда и только тогда, если все полюсы его передаточной характеристики по модулю не превосходят единицы, или, что то же самое, лежат внутри единичной окружности.

Большое число приложений фильтрации сигналов использует так называемые фильтры с линейной фазово-частотной характеристикой (ЛФЧХ). Такие фильтры обладают частотной характеристикой вида:

$$H(\omega) = A(\omega)e^{j\omega\alpha}, \quad (3.8)$$

где действительная функция $A(\omega)$ является амплитудно-частотной характеристикой, постоянная α также действительна. Исследуем вопрос о возможности построения ЛФЧХ-фильтров с сосредоточенными параметрами. Для этого запишем частотную характеристику фильтра с сосредоточенными параметрами:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-j\omega\Delta} + \alpha_2 e^{-2j\omega\Delta} + \dots + \alpha_{N-1} e^{-j(N-1)\omega\Delta} + \alpha_N e^{-jN\omega\Delta}}{1 + \beta_1 e^{-j\omega\Delta} + \beta_2 e^{-2j\omega\Delta} + \dots + \beta_{N-1} e^{-j(M-1)\omega\Delta} + \beta_M e^{-jM\omega\Delta}} = \\ &= \frac{e^{-jN\omega\Delta/2} (\alpha_0 e^{jN\omega\Delta/2} + \alpha_1 e^{j(N/2-1)\omega\Delta} + \alpha_2 e^{j(N/2-2)\omega\Delta} + \dots + \alpha_{N-1} e^{-j(N/2-1)\omega\Delta} + \alpha_N e^{-jN\omega\Delta/2})}{e^{-jM\omega\Delta/2} (\beta_0 e^{jM\omega\Delta/2} + \beta_1 e^{j(M/2-1)\omega\Delta} + \beta_2 e^{j(M/2-2)\omega\Delta} + \dots + \beta_{M-1} e^{-j(M/2-1)\omega\Delta} + \beta_M e^{-jM\omega\Delta/2})}. \end{aligned}$$

Из сравнения последнего выражения с (3.8) легко получается условие линейности фазово-частотной характеристики:

$$\alpha_0 = \alpha_N^*; \quad \alpha_1 = \alpha_{N-1}^*; \quad \alpha_2 = \alpha_{N-2}^*; \quad \dots;$$

$$\beta_0 = \beta_M^*; \quad \beta_1 = \beta_{M-1}^*; \quad \beta_2 = \beta_{M-2}^*; \quad \dots,$$

то есть наборы коэффициентов полиномов как числителя, так и знаменателя передаточной характеристики (3.7) симметричны. Полином же с симметричными коэффициентами обладает одной характерной особенностью:

$$\begin{aligned} P(z^{-1}) &= \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_2 z^{-(N-2)} + \alpha_1 z^{-(N-1)} + \alpha_0 z^{-N} = \\ &= z^{-N} (\alpha_0 z^N + \alpha_1 z^{N-1} + \alpha_2 z^{N-2} + \dots + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0) = z^{-N} P(z). \end{aligned}$$

Эта особенность распространяется и на всю передаточную характеристику (3.7): $H(z^{-1}) = z^{-N+M} H(z)$. Следовательно, если передаточная характеристика фильтра имеет нуль в точке z , она должна иметь его и в точке z^{-1} . Аналогично, если передаточная характеристика фильтра имеет полюс в точке z , она должна иметь его и в точке z^{-1} , то есть она обязательно будет иметь полюс, лежащий вне единичной окружности, а поэтому цифровой фильтр с рассматриваемой передаточной характеристикой не будет устойчивым. Таким образом, устойчивый цифровой фильтр с сосредоточенными параметрами может обладать линейной фазово-частотной характеристикой в том и только в том случае, если его передаточная характеристика не содержит полюсов.

На основании вышеизложенного может создаться впечатление, что все линейные цифровые фильтры имеют передаточную характеристику вида (3.7). Существуют, однако, системы обработки сигналов, которые не могут быть сведены к фильтрам с сосредоточенными параметрами. Так, например, в задачах на дифракцию электромагнитного излучения [Дж. Гудмен. Введение в фурье-оптику. – М.: Мир, 1970, с.88] связь между исходным изображением $f(x, y)$

и дифрагированным (на расстояние d) изображением $g(x, y)$ задается двумерной импульсной характеристикой $h(x, y)$:

$$g(x, y) = f(x, y) \otimes h(x, y) = f(x, y) \otimes e^{-\frac{jk}{2d}(x^2+y^2)},$$

где k – волновое число, x и y – пространственные координаты. В одномерном случае дискретизация пространственной координаты x с интервалом дискретизации Δ приведет к соотношению:

$$g_n = f_n \otimes h_n = f(x, y) \otimes e^{-\frac{jk}{2d}n^2\Delta^2},$$

что дает основание записать передаточную характеристику системы:

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{jk}{2d}n^2\Delta^2} z^{-n}.$$

Полученная передаточная характеристика никаким образом не может быть записана в виде (3.7). Более того, сама импульсная характеристика цифрового фильтра в рассматриваемом примере неограничена в обе стороны, то есть фильтр к тому же не является каузальным.

Приведенный пример в очередной раз демонстрирует, что полученные результаты (3.1-3.7) и сформулированный критерий устойчивости цифровых фильтров применим только к каузальным фильтрам с сосредоточенными параметрами.

Контрольные вопросы и задачи.

1. Постройте цифровой фильтр, вычисляющий вторую производную входного сигнала: $y(t) = x''(t)$. При этом воспользуйтесь разностной аппроксимацией производной.

2. Постройте цифровой фильтр, вычисляющий интегрирование входного сигнала: $y(t) = \int_{t-T}^t x(t) dt$. Воспользуйтесь при этом формулами численного интегрирования.

3. Найдите частотную характеристику элемента задержки $y_n = x_{n-1}$. Обладает ли он линейной ФЧХ?

4. Можно ли построить цифровой фильтр с передаточной характеристикой, имеющей два полюса: $p_1 = 0,5$ и $p_2 = 0,5j$?

5. Сколько нулей и сколько полюсов имеет передаточная характеристика цифрового фильтра $H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-2}}$?

6. Постройте цифровой фильтр с сосредоточенными параметрами, обладающий передаточной характеристикой $H(z) = \frac{1}{1 - z^2}$.

7. Обладает ли линейной фазово-частотной характеристикой цифровой фильтр примера 7?

8. Найдите парциальные передаточные характеристики цифрового фильтра примера 7.

9. Могут ли не совпадать наборы полюсов передаточной характеристики цифрового фильтра с сосредоточенными параметрами и его парциальных передаточных характеристик?

10. Можно ли построить цифровой фильтр с сосредоточенными параметрами с передаточной характеристикой $H(z) = \ln|z|$?

4. Структуры построения цифровых фильтров.

Рассмотрим цифровой фильтр с сосредоточенными параметрами, передаточная характеристика которого (3.7) не содержит полюсов. Передаточная характеристика в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z) &= A(z^{-1} - z_1^{-1})(z^{-1} - z_2^{-1}) \dots (z^{-1} - z_N^{-1}) = \\ &= a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{N-1} z^{-(N-1)} + a_N z^{-N}, \end{aligned}$$

из чего следует связь между z -преобразованиями входного и выходного сигналов:

$$\mathbf{Y}(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{N-1} z^{-(N-1)} + a_N z^{-N}) \mathbf{X}(z).$$

После обратного z -преобразования получим уравнение работы цифрового фильтра:

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_{N-1} x_{n-N+1} + a_N x_{n-N}.$$

Структурная схема фильтра, реализующего полученное уравнение, приведена на рис.3. Фильтры с рассматриваемой структурой носят название *трансверсальные* цифровые фильтры.

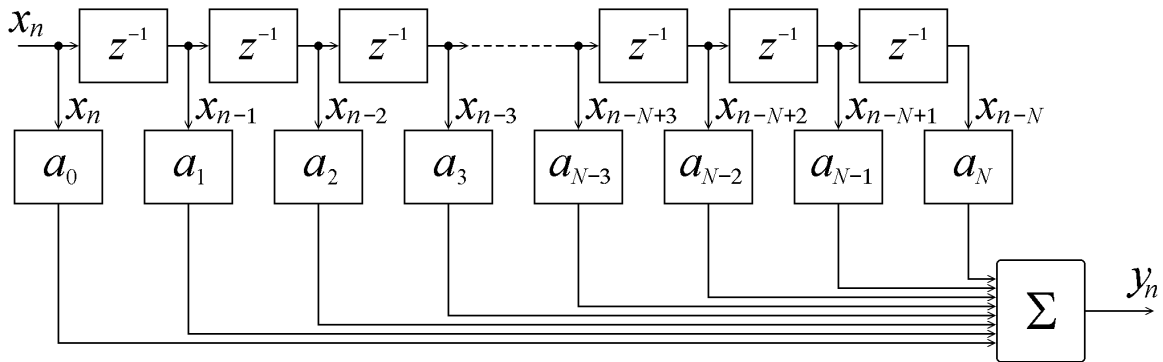


Рис.3. Структурная схема трансверсального цифрового фильтра.

Импульсная характеристика трансверсального цифрового фильтра представляет собой коэффициенты передаточной характеристики a_n :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{h}; \quad h_n = a_n; \quad n = 0, \dots, N.$$

Поскольку количество элементов задержки в реальном трансверсальном фильтре конечно, конечным является и количество ненулевых отсчетов импульсной характеристики фильтра, то есть импульсная характеристика трансверсального цифрового фильтра является конечной. Фильтры, обладающие таким свойством, принято выделять в отдельный класс и называть *КИХ-фильтрами*.

Итак, трансверсальные фильтры обладают конечной импульсной характеристикой, то есть относятся к КИХ-фильтрам. Обратное утверждение неверно, и КИХ-фильтры можно строить, не используя трансверсальные структуры.

Рассмотрим теперь, как альтернативу КИХ-фильтра, цифровой фильтр, передаточная характеристика которого содержит только полюсы:

$$H(z) = \frac{A}{(z^{-1} - p_1^{-1})(z^{-1} - p_2^{-1}) \dots (z^{-1} - p_M^{-1})} =$$

$$= \frac{1}{1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_{N-1} z^{-(N-1)} + \beta_N z^{-N}}.$$

Связь z -преобразования входного и выходных сигналов в этом случае примет вид:

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_{N-1} z^{-(N-1)} + \beta_N z^{-N}},$$

откуда после обратного z -преобразования вытекает уравнение работы фильтра:

$$y_n = x_n - (\beta_1 y_{n-1} + \beta_2 y_{n-2} + \dots + \beta_{N-1} y_{n-(N-1)} + \beta_N y_{n-N}),$$

по которому легко построить его структурную схему, которая приведена на рис.4.

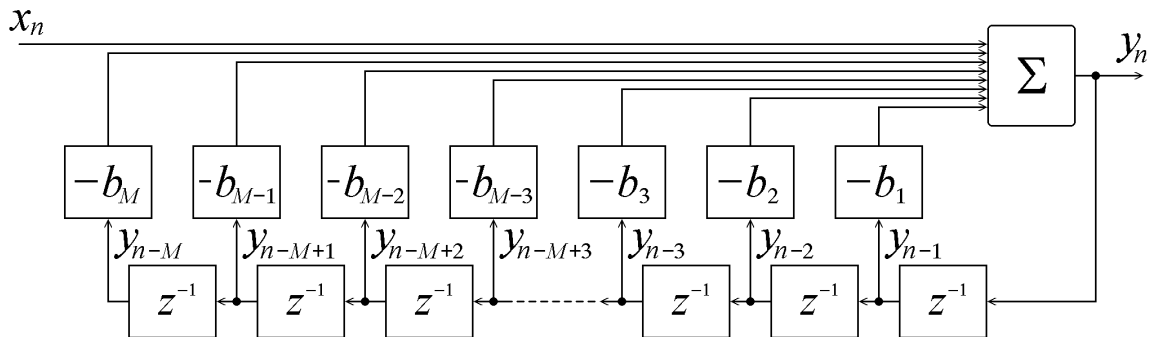


Рис.4. Структурная схема рекурсивного цифрового фильтра без нулей передаточной характеристики.

Рассмотренный цифровой фильтр относится к так называемым *рекурсивным* фильтрам. Своим названием они обязаны наличием «обратной связи» – выходной сигнал снова подается на вход системы. Как правило (но не всегда), рекурсивные цифровые фильтры обладают бесконечной импульсной характеристикой, то есть являются *БИХ-фильтрами*. Простейший пример рекурсивного цифрового фильтра с импульсной характеристикой $h_n = a^n$ рассмотрен в примере 5, где показывается, что передаточная характеристика фильтра имеет один полюс:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

Реализация цифровых фильтров может быть самой разной, причем совершенно различные на первый взгляд фильтры могут обладать идентичными передаточными характеристиками. На рис.5 приведены три различных цифровых фильтра с одной и той же передаточной характеристикой. Несмотря на одинаковость полной передаточной характеристики, если эти фильтры представить в виде (3.1), то они окажутся различными, и различными также будут их парциальные передаточные характеристики.

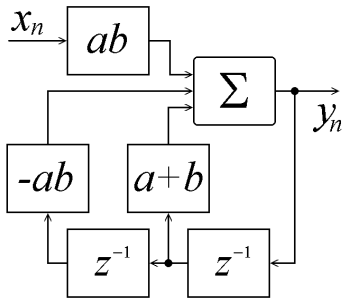


Рис.5а. Фильтр с передаточной характеристикой, содержащей два полюса.

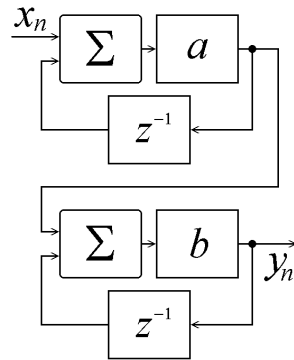


Рис.5б. Последовательное (каскадное) соединение двух фильтров первого порядка.

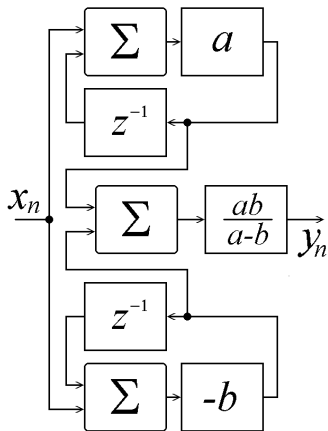


Рис.5в. Параллельное соединение фильтров первого порядка.

На рис.5а приведена структурная схема фильтра, передаточная характеристика которого содержит два действительных полюса a и b :

$$H(z) = \frac{1}{(z^{-1} - a^{-1})(z^{-1} - b^{-1})} = \frac{1}{z^{-2} - (a^{-1} + b^{-1})z^{-1} + a^{-1}b^{-1}} = \frac{ab}{abz^{-2} - (a+b)z^{-1} + 1}$$

Работа фильтра определяется уравнением:

$$y_n = abx_n + (a+b)y_{n-1} - aby_{n-2}$$

Рассмотренную передаточную характеристику можно представить в виде произведения двух дробей:

$$H(z) = \frac{1}{z^{-1} - a^{-1}} \times \frac{1}{z^{-1} - b^{-1}} = \frac{a}{1 - az^{-1}} \times \frac{b}{1 - bz^{-1}},$$

поэтому ее можно реализовать путем последовательного соединения двух фильтров, передаточная характеристика каждого из которых содержит только один полюс (фильтры первого порядка).

Эти фильтры будут описываться уравнениями:

$$y_n^{(1)} = a(x_n + y_{n-1}^{(1)}); \quad y_n^{(2)} = a(x_n + y_{n-1}^{(2)}),$$

а их соединение приведено на рис.5б.

Произведение двух дробей можно записать в виде их суммы:

$$H(z) = \frac{1}{z^{-1} - a^{-1}} \times \frac{1}{z^{-1} - b^{-1}} = \frac{ab}{a-b} \left(\frac{a}{1 - az^{-1}} - \frac{b}{1 - bz^{-1}} \right),$$

поэтому сам фильтр можно реализовать путем суммирования выходных сигналов фильтров с передаточными характеристиками:

$$H_1(z) = \frac{a}{1 - az^{-1}}; \quad H_2(z) = \frac{-b}{1 - bz^{-1}},$$

с умножением полученного сигнала на коэффициент $ab/(a-b)$. Цифровой фильтр описанной структуры изображен на рис.5в.

Как демонстрирует рис.5, цифровой фильтр с заданной передаточной характеристикой можно реализовать различными способами. Это дает разработчику лишнюю «степень свободы», позволяя помимо заданной передаточной характеристики добиться выполнения каких-либо других требований типа минимизации шумов дискретизации по уровню, минимизации числа элементов схемы фильтра и т.д.

Поскольку цифровые фильтры рис.3 и рис.4 обладают передаточными характеристиками, являющиеся соответственно числителем и знаменателем выражения (3.7), их последовательное соединение является фильтром с передаточной характеристикой (3.7). Такой фильтр изображен на рис.6. Первая его часть не имеет полюсов передаточной характеристики, ее выход подключается ко входу второй части, передаточная характеристика которой обладает только полюсами и не имеет нулей. Передаточная характеристика всего фильтра воспроизводит выражение(3.7), то есть обладает как нулями, так и полюсами.

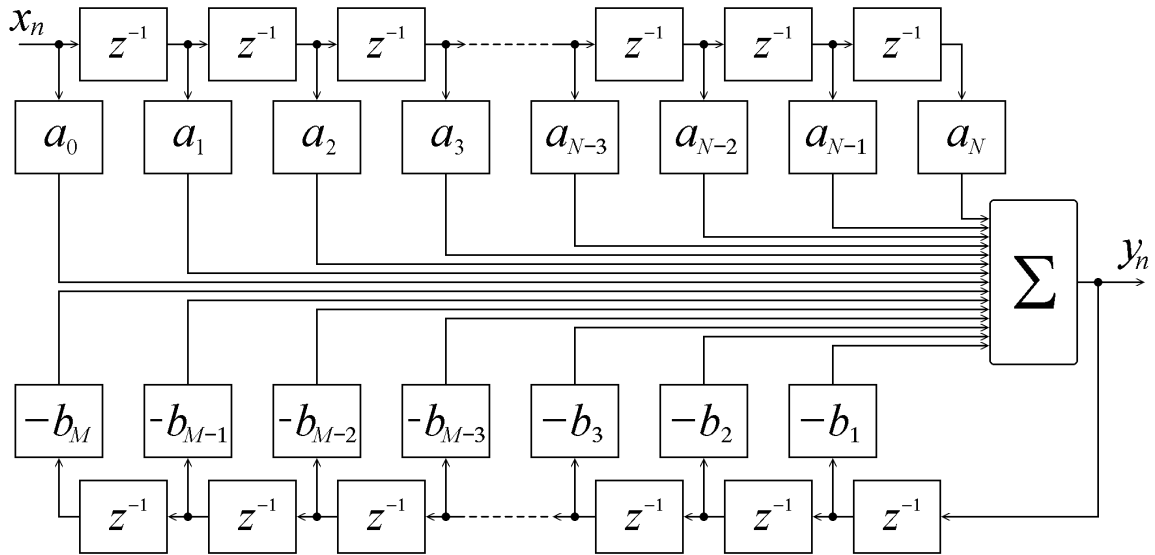


Рис.6. Первая прямая форма построения цифровых фильтров.

Структурная схема, приведенная на рис.6, называется первой прямой формой построения цифрового фильтра. Альтернативой первой прямой формы является вторая прямая форма, которая получается из структурной схемы рис.6 перестановкой частей – первая часть фильтра имеет передаточную характеристику без нулей, а вторая – без полюсов.

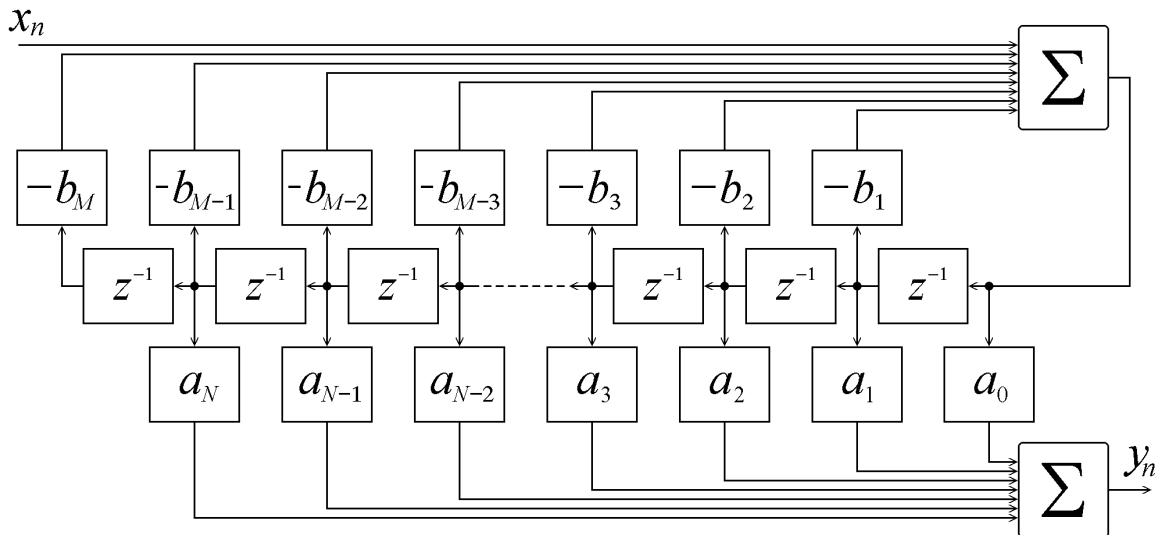


Рис.7. Вторая прямая форма (каноническая форма) построения цифровых фильтров.

Получающаяся при этом структурная схема фильтра приведена на рис.7. Главным ее достоинством, как это видно из рисунка, является уменьшенное по сравнению с первой прямой формой количество элементов задержки. Действительно, первая прямая форма использует $N + M$ элементов задержки, а вторая – $\min(N, M)$.

Контрольные вопросы и задачи.

1. Для какой передаточной характеристики первая и вторая прямые формы построения цифрового фильтра совпадают?

2. Всегда ли вторая прямая форма использует меньшее количество элементов задержки, нежели первая?

3. Можно ли построить цифровой фильтр со структурой, не являющейся ни одной прямой формой?

4. Проанализируйте схемы рис.5(а-в). Есть ли среди них прямые формы?

5. Возможны ли передаточные характеристики, которые невозможно реализовать цифровыми фильтрами с прямыми формами построения?

6. Постройте первую и прямую форму цифрового фильтра, передаточная характеристика которого имеет один ноль $z = 0,64$ и два полюса $p_1 = 0,8$ и $p_2 = -0,8$. Однозначно ли построение такого фильтра?

7. Постройте цифровой фильтр с передаточной характеристикой $H(z) = \frac{3z^{-1}}{3z^{-2} - 8z^{-1} + 4}$. Является ли устойчивым построенный фильтр?

8. Является ли устойчивым фильтр с передаточной характеристикой $H(z) = \frac{z^{-2} - 2,5z^{-1} + 1}{z^{-1} - 0,5}$? Конечна ли его импульсная характеристика?

9. Используя прямые формы, постройте фильтр с передаточной характеристикой $H(z) = \frac{z^{-2} + 1}{z^{-4} + 1}$.

10. Является ли фильтр с передаточной характеристикой $H(z) = \frac{z^{-4} + 1}{z^{-2} + 1}$ рекурсивным фильтром?

5. Проектирование цифровых фильтров методом взвешивания.

Наиболее привлекательными с точки зрения проектирования являются трансверсальные фильтры, обладающие конечной импульсной характеристикой. Как уже было отмечено, коэффициенты трансверсального фильтра совпадают с отсчетами его импульсной характеристики. Если исходными данными для проектирования является именно импульсная характеристика фильтра, то проектирование не требует вообще никаких усилий. Обычно, однако, исходными данными является требуемая амплитудно-частотная характеристика фильтра (АЧХ) $H(\omega)$. В этом случае отсчеты импульсной характеристики должны выражаться через АЧХ формулой (1.4):

$$h_n = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} H(\omega) e^{j\omega n \Delta} d\omega = \frac{\Delta}{2\pi} \left(\int_{-\pi/\Delta}^0 H(\omega) e^{j\omega n \Delta} d\omega + \int_0^{\pi/\Delta} H(\omega) e^{j\omega n \Delta} d\omega \right) =$$

$$= \frac{\Delta}{2\pi} \left(\int_0^{\pi/\Delta} H(\omega) e^{j\omega n \Delta} d\omega + \int_0^{\pi/\Delta} H(-\omega) e^{-j\omega n \Delta} d\omega \right) = \frac{\Delta}{\pi} \int_0^{\pi/\Delta} H(\omega) \cos(\omega n \Delta) d\omega. \quad (5.1)$$

Пример 8. Зададим АЧХ фильтра:

$$H(f) = \begin{cases} 0.5 + f/(2\text{кГц}) & \text{при } |f| \leq 1\text{кГц}; \\ 0 & \text{при } |f| > 1\text{кГц}, \end{cases}$$

где вместо циклической частоты ω используется обыкновенная частота $f = \omega/(2\pi)$. Внешний вид такой характеристики показан на рис.8а. Интервал дискретизации должен удовлетворять условию Котельникова $\Delta \leq \pi/\omega_B = 1/(2f_B) = 0.5\text{мс}$. Выберем $\Delta = 0.1\text{мс}$. Отсчеты импульсной характеристики могут быть вычислены по формуле (5.1), вид импульсной характеристики приведен на рис.8б.

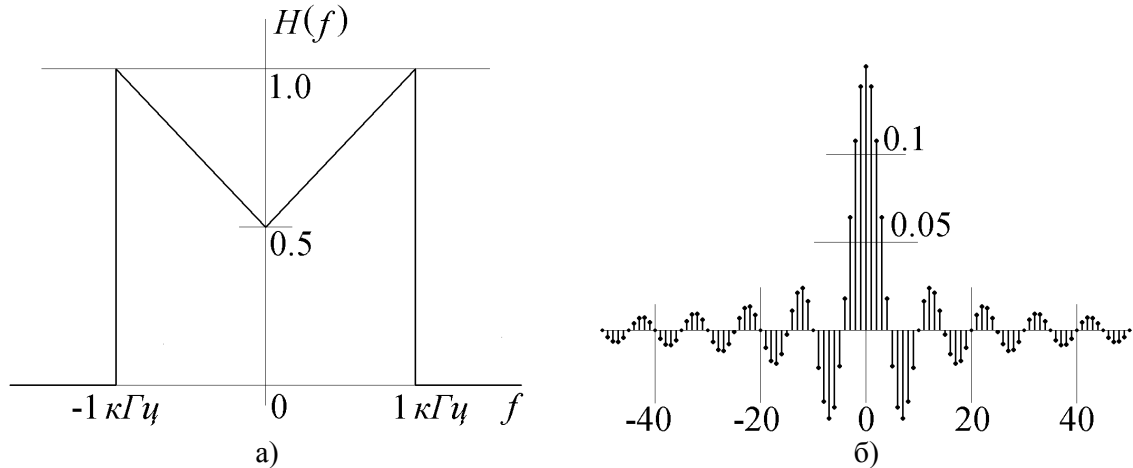


Рис.8. Амплитудно-частотная и импульсная характеристики цифрового фильтра из примера 8.

После вычисления импульсной характеристики фильтра неизбежно возникает ряд вопросов. Во-первых, полученная импульсная характеристика неограниченна и ее, казалось бы, невозможно использовать для построения трансверсального фильтра. Во-вторых, она вообще не удовлетворяет требованию каузальности и ее нельзя использовать для построения каких бы то ни

было временных фильтров. Обе эти проблемы помогает разрешить простой прием. Импульсная характеристика рис.8б, как и любая другая, вычисленная по формуле (5.1), должна убывать при $n \rightarrow \pm\infty$. Поэтому можно объявить ее отсчеты, большие некоторого номера, равными нулю: $h_n = 0$ при $|n| > N$. После этого сдвинем уже конечную импульсную характеристику вправо на N . Этот сдвиг приведет к домножению частотной характеристики на множитель $e^{-j\omega N\Delta}$, то есть сдвиг не приведет к изменению амплитудно-частотной характеристики. Конечно, отбрасывание «хвостиков» импульсной характеристики должно повлиять на частотную характеристику проектируемого фильтра.

Пример 9. Вычислим АЧХ цифрового фильтра с импульсной характеристикой, получающийся из импульсной характеристики рис.8б отбрасыванием отсчетов с $|n| > 30$ и сдвигом полученной характеристики вправо на 30 отсчетов (рис.9а). Получающаяся при этом импульсная характеристика содержит 61 отсчет. Частотная характеристика без учета фазового множителя $e^{-j\omega N\Delta}$ может быть вычислена по формуле (1.2):

$$H(\omega) = \sum_{n=-30}^{30} h_n e^{-j\omega n\Delta},$$

и приведена на рис.9б.

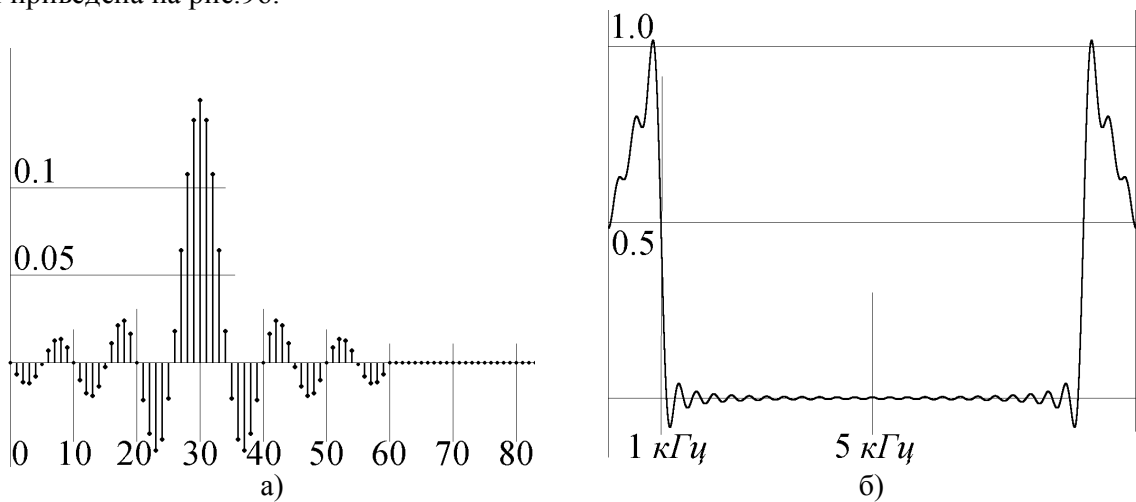


Рис.9. Импульсная и частотная характеристики цифрового фильтра примера 8, полученные после применения прямоугольного окна шириной 61.

На рис.9 хорошо видно, что получившаяся частотная характеристика фильтра действительно является периодической с периодом (по обыкновенной частоте $f = \omega/(2\pi)$) $F = 1/\Delta = 10$ кГц.

Отличие формы амплитудно-частотной характеристики созданного таким образом цифрового фильтра связано в первую очередь с переходом от бесконечной импульсной характеристики к ее конечной выборке. Из этого следует, что увеличение длительности этой конечной выборки должно позволить приблизиться к заданной АЧХ.

Пример 10. Синтезируем тот же фильтр, который был рассмотрен в примере 9, но отбросим отсчеты импульсной характеристики с номерами $|n| > 50$. Новая импульсная характеристика содержит 101 отсчет и приведена на рис.10а. Частотная характеристика синтезированного фильтра, рассчитанная по той же формуле (1.2), показана на рис.10б. Налицо гораздо большее приближение к заданной амплитудно-частотной характеристике.

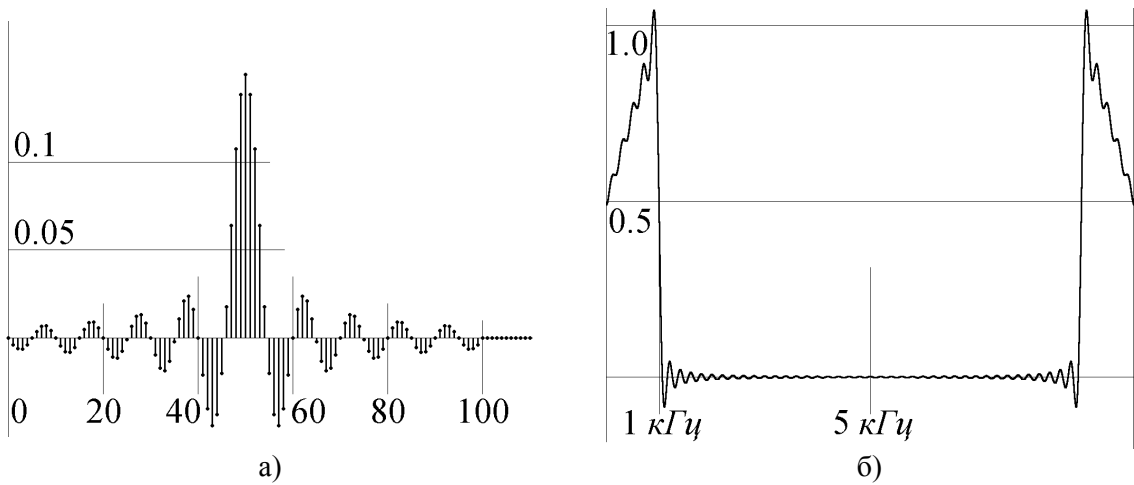


Рис.10. Импульсная и частотная характеристики цифрового фильтра примера 8, полученные после применения прямоугольного окна шириной 101.

Общей отличительной чертой цифровых фильтров из примеров 9 и 10 является наличие осцилляций частотной характеристики, амплитуда которых, как это видно из рис.9 и рис.10, не уменьшается при увеличении числа отсчетов импульсной характеристики. Нетрудно выяснить причину появления этих осцилляций. При оставлении конечной выборки отсчетов импульсной характеристики фактически происходит умножение бесконечной импульсной характеристики, спектр которой, естественно, совпадает с заданным спектром, на прямоугольный сигнал (часто используют термин *окно*):

$$w_n = \begin{cases} 1 & \text{при } |n| \leq N; \\ 0 & \text{при } |n| > N. \end{cases}$$

При умножении же сигналов их спектры, как известно, подвергаются свертке. Действительно,

$$\begin{aligned} X(\omega) * W(\omega) &= \left(\sum_{n=-N}^N x_n e^{-j\omega n \Delta} \right) * \left(\sum_{n'=-N}^N w_{n'} e^{-j\omega n' \Delta} \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-N}^N x_n e^{-j\omega' n \Delta} \right) \left(\sum_{n'=-N}^N w_{n'} e^{-j(\omega-\omega') n' \Delta} \right) d\omega' = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n, n'=-N}^N x_n w_{n'} e^{-j\omega' n \Delta} e^{-j(\omega-\omega') n' \Delta} d\omega' = \\ &= \sum_{n, n'=-N}^N x_n w_{n'} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega' \Delta (n-n')} e^{-j\omega n' \Delta} d\omega' = \sum_{n, n'=-N}^N x_n w_{n'} e^{-j\omega n' \Delta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega' \Delta (n-n')} d\omega' = \\ &= \frac{2\pi}{\Delta} \sum_{n, n'=-N}^N x_n w_{n'} e^{-j\omega n' \Delta}. \end{aligned}$$

Спектр прямоугольного сигнала (рис.1) обладает характерными осцилляциями, которые и проявляются при применении прямоугольного окна (рис.9, рис.10).

Выяснив причину появления осцилляций, можно предложить рецепт их устранения. Для этого достаточно использовать не прямоугольное окно, а какое-либо другое окно, в спектре которого отсутствуют (или почти отсутст-

вуют) нежелательные осцилляции. На практике часто используется так называемое *окно Хэмминга*:

$$w_n = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos\left(\frac{n\pi}{N}\right) & \text{при } |n| \leq N; \\ 0 & \text{при } |n| > N. \end{cases}$$

Минимум осцилляций в спектре окна Хэмминга достигается при значении параметра $\alpha = 0.54$. Часто, однако, для простоты вычислений выбирают $\alpha = 0.5$, такое окно носит название *окно Ханна*. На рис.11 приведено окно Хэмминга при $\alpha = 0.54$, $N = 50$ и фрагмент его спектра при $\Delta = 0.1$ мс. Там же для сравнения (тонкая линия) показан фрагмент спектра прямоугольного окна шириной 101 отсчет и с той же частотой дискретизации.

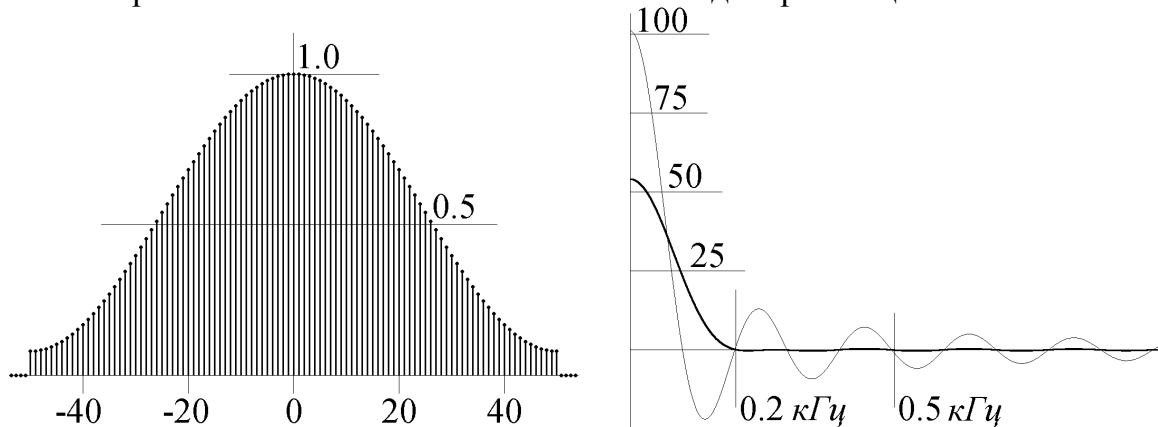


Рис.11. Окно Хэмминга при $\alpha = 0.54$, $N = 50$ и фрагмент его спектра при $\Delta = 0.1$ мс.

Нетрудно удостовериться, что устранение осцилляций частотной характеристики достигается за счет увеличения ширины ее главного лепестка.

Пример 11. Применим окно Хэмминга для проектирования цифрового фильтра примера 8. Выберем при этом $\alpha = 0.54$ и $N = 50$. Импульсная и частотная характеристики получившегося при этом фильтра приведены на рис.12.

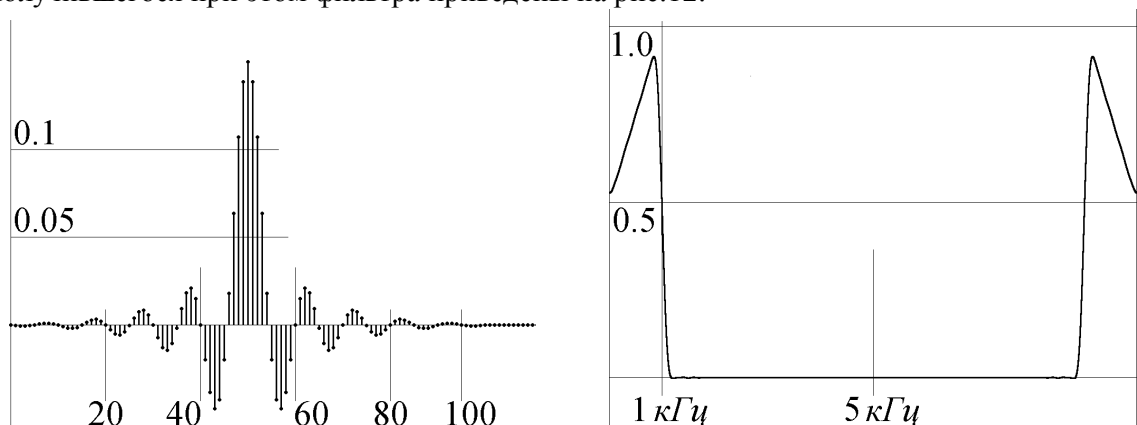


Рис.12. Импульсная и частотная характеристики цифрового фильтра примера 8, полученные после применения окна Хэмминга ($\alpha = 0.54$) шириной 101.

Сравнение рис.12 и рис.10 подтверждает вывод, что устранение осцилляций частотной характеристики происходит за счет ее «размытия», то есть

увеличения ширины ее мелких деталей, таких как резкие перепады, выбросы и т.д.

Наряду с прямоугольным окном и окном Хэмминга используется также окно Бартлета (треугольное окно):

$$w_n = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N} & \text{при } |n| \leq N; \\ 0 & \text{при } |n| > N, \end{cases}$$

и окно Кайзера:

$$w_n = \begin{cases} \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - (n/N)^2})}{I_0(\beta)} & \text{при } |n| \leq N; \\ 0 & \text{при } |n| > N, \end{cases}$$

где I_0 – функция Бесселя нулевого порядка. Окно Кайзера обеспечивает минимальную энергию боковых лепестков спектра окна. Чем больше параметр β , тем шире главный лепесток и меньше доля энергии в боковых лепестках.

Рассмотренный метод проектирования цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой, имеющих заданную частотную характеристику носит название *метод взвешивания* по той причине, что отсчеты импульсной характеристики, вычисленные по формуле (5.1), умножаются на весовые коэффициенты, определяемые тем или иным окном, в простейшем случае прямоугольным. Напомним основные этапы проектирования КИХ-фильтров методом взвешивания:

1. По заданной частотной характеристике, используя (5.1), рассчитать отсчеты импульсной характеристики.
2. Выбрать тип используемого окна (прямоугольное, Ханна, Хэмминга, Бартлета или Кайзера) и его ширину.
3. Домножить полученную импульсную характеристику на выбранное окно.
4. Сдвинуть конечный набор отсчетов импульсной характеристики на половину ширины окна, так, чтобы первый отличный от нуля отсчет имел номер 0.
5. Полученный конечный набор отсчетов импульсной характеристики использовать для построения трансверсального цифрового фильтра (рис.3).

Поскольку исходная частотная характеристика является, как правило, чисто действительной, вычисленные отсчеты импульсной характеристики симметричны: $h_n = h_{-n}$. Эта симметрия сохраняется, конечно, и после умножения на симметричное окно, и после сдвига импульсной характеристики. Поэтому рассчитанный описанным методом цифровой фильтр (конечно, при действительной исходной частотной характеристике) будет неизбежно обладать линейной фазово-частотной характеристикой.

Контрольные вопросы и задачи.

1. Обладают ли фильтры, построенные методом взвешивания, линейной фазово-частотной характеристикой?

2. Можно ли использовать метод взвешивания для построения цифровых фильтров с заданной фазово-частотной характеристикой?

3. Импульсные характеристики примеров 9-11 обладают симметрией. Является ли это свойство неизбежным при использовании метода взвешивания?

4. Может ли оконная функция w_n не обладать симметрией $w_n = w_{-n}$?

5. Можно ли использовать метод взвешивания для проектирования фильтров с нечетной импульсной характеристикой $H(-\omega) = -H(\omega)$?

6. Постройте методом взвешивания цифровой фильтр с частотной характеристикой:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{при } |f| < 1 \text{ кГц;} \\ 0 & \text{при } |f| > 1 \text{ кГц.} \end{cases}$$

Используйте при этом частоту дискретизации 10 кГц и прямоугольное окно шириной 101 отсчет.

7. Повторите п.6 с частотой дискретизации 20 кГц . Сравните частотные характеристики получившихся фильтров.

8. Повторите п.6 с шириной окна 201 отсчет. Сравните частотные характеристики получившихся фильтров.

9. Постройте методом взвешивания цифровой фильтр с частотной характеристикой:

$$H(f) = \begin{cases} 0 & \text{при } |f| < 1 \text{ кГц;} \\ 1 & \text{при } |f| > 1 \text{ кГц.} \end{cases}$$

10. Повторите п.9 с другими значениями частоты дискретизации и ширины окна. Сравните частотные характеристики получившихся фильтров.

6. Проектирование цифровых фильтров методом частотной выборки.

Попытаемся создать цифровой фильтр, частотная характеристика которого в конечном числе точек совпадает с заданной характеристикой $H(\omega)$. Пусть количество этих точек равно N . Тогда справедлива система:

$$H(\omega_k) = H_k, \quad k = 0, \dots, K-1. \quad (6.1)$$

Назвать эту систему системой уравнений, конечно, уместно только в том случае, если она содержит K неизвестных в левой части. Передаточная (а следовательно, и частотная) характеристика любого цифрового фильтра с сосредоточенными параметрами имеет вид (3.7) и полностью определяется заданием конечного набора нулей и полюсов:

$$H(\omega) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-j\omega\Delta} z^{-1} + \alpha_2 e^{-2j\omega\Delta} + \dots + \alpha_{N-1} e^{-j(N-1)\omega\Delta} + \alpha_N e^{-jN\omega\Delta}}{1 + \beta_1 e^{-j\omega\Delta} + \beta_2 e^{-2j\omega\Delta} + \dots + \beta_{M-1} e^{-j(M-1)\omega\Delta} + \beta_M e^{-jM\omega\Delta}}. \quad (6.2)$$

Если принять в выражении (6.2) $N + M + 1 = K$, то система (6.1) действительно превращается в систему уравнений относительно K неизвестных коэффициентов цифрового фильтра и проектирование цифрового фильтра сведется к решению этой системы. Для проектировщика, конечно, остается проблема выбора – сколько нулей и сколько полюсов должна содержать передаточная характеристика создаваемого фильтра. Более того, даже если определиться с количеством нулей и полюсов, все равно останется опасность, что рассчитанный фильтр будет иметь полюсы передаточной характеристики, лежащие вне единичной окружности, и, следовательно, не будет устойчивым. Этих осложнений можно избежать, если совсем отказаться от полюсов передаточной характеристики. В этом случае частотная характеристика фильтра определяется K коэффициентами α_n , которые к тому же являются отсчетами импульсной характеристики фильтра $h_n = \alpha_n$, и которые можно найти, решая систему уравнений:

$$H_k = H(\omega_k) = \sum_{n=0}^{K-1} h_n e^{-j\omega_k n \Delta}, \quad k = 0, \dots, K-1. \quad (6.3)$$

Решение системы (6.3) дает непосредственно коэффициенты трансверсального фильтра, при этом на выбранные частоты ω_k не накладывается никаких ограничений. Описанный метод проектирования цифровых фильтров позволяет проектировать фильтры с конечной импульсной характеристикой и называется методом *частотной выборки*.

В практическом смысле удобно выбрать частоты ω_k равномерно отстоящими друг от друга на интервале $0 \dots 2\pi$:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{K\Delta} k, \quad k = 0, \dots, K-1.$$

При таком выборе система (6.3) примет более удобный вид:

$$H_k = \sum_{n=0}^{K-1} h_n e^{-j\frac{2\pi}{K} kn}, \quad k = 0, \dots, K-1.$$

Для разрешения полученной системы относительно h_n домножим обе ее части на $e^{j\frac{2\pi}{K}kn'}$ и просуммируем по k :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{K-1} H_k e^{j\frac{2\pi}{K}kn'} &= \sum_{k=0}^{K-1} e^{j\frac{2\pi}{K}kn'} \sum_{n=0}^{K-1} h_n e^{-j\frac{2\pi}{K}kn} = \sum_{n=0}^{K-1} h_n \sum_{k=0}^{K-1} e^{j\frac{2\pi}{K}kn'} e^{-j\frac{2\pi}{K}kn} = \\ &= \sum_{n=0}^{K-1} h_n \sum_{k=0}^{K-1} e^{j\frac{2\pi}{K}(n'-n)k} = \sum_{n=0}^{K-1} h_n \sum_{k=0}^{K-1} e^{j\frac{2\pi}{K}(n'-n)k}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Вычислим сумму в выражении (6.4):

$$\sum_{k=0}^{K-1} e^{j\frac{2\pi}{K}(n'-n)k} = \begin{cases} K & \text{при } n = n' \\ \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{K}(n'-n)K}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{K}(n'-n)}} & \text{при } n \neq n' \end{cases} = \begin{cases} K & \text{при } n = n' \\ 0 & \text{при } n \neq n' \end{cases}.$$

Теперь (6.4) примет окончательный вид:

$$h_n = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} H_k e^{j\frac{2\pi}{K}kn}. \quad (6.5)$$

Итак, нам удалось подобрать конечный набор отсчетов импульсной характеристики цифрового фильтра с заданными K значениями частотной характеристики. Зная отсчеты импульсной характеристики, можно вычислить передаточную характеристику фильтра:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{K-1} h_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{K-1} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} H_k e^{j\frac{2\pi}{K}kn} z^{-n} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} H_k \sum_{n=0}^{K-1} e^{j\frac{2\pi}{K}kn} z^{-n} = \\ &= \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} H_k \sum_{n=0}^{K-1} \left(e^{j\frac{2\pi}{K}k} z^{-1} \right)^n = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} H_k \frac{1 - \left(e^{j\frac{2\pi}{K}k} z^{-1} \right)^K}{1 - e^{j\frac{2\pi}{K}k} z^{-1}} = \\ &= \frac{1 - z^{-K}}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{H_k}{1 - e^{j\frac{2\pi}{K}k} z^{-1}}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Полученный результат вызывает некоторое недоумение – мы проектировали фильтр с передаточной характеристикой, содержащей только нули, однако получившаяся в результате передаточная характеристика (6.6) в явном виде содержит полюсы. Если, однако, внимательно присмотреться к передаточной характеристике (6.6), то можно заметить, что выражение $1 - z^{-K}$ представляет собой полином с K корнями:

$$z^{-K} - 1 = (z^{-1} - 1) \left(z^{-1} - e^{j\frac{2\pi}{K}} \right) \left(z^{-1} - e^{2j\frac{2\pi}{K}} \right) \left(z^{-1} - e^{3j\frac{2\pi}{K}} \right) \dots \left(z^{-1} - e^{(K-1)j\frac{2\pi}{K}} \right),$$

то есть каждый полюс передаточной характеристики (6.6) компенсируется нулем и результирующая характеристика по-прежнему не содержит полюсов.

Практическое применение формулы (6.6) сопряжено с трудностью реализации фильтров первого порядка с комплексными полюсами:

$$H(z) = \frac{H_k}{1 - e^{j\frac{2\pi}{K}k} z^{-1}}.$$

Эту трудность легко преодолеть, вспомнив, что частотная характеристика фильтра с действительной импульсной характеристикой симметрична: $H_k = H_{K-k}^*$, и поэтому сумма двух членов выражения (6.6) будет давать чисто действительный результат:

$$\begin{aligned} \frac{H_k}{1 - e^{j\frac{2\pi}{K}k} z^{-1}} + \frac{H_{K-k}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{K}(K-k)} z^{-1}} &= \frac{H_k}{1 - e^{j\frac{2\pi}{K}k} z^{-1}} + \frac{H_k^*}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{K}k} z^{-1}} = \\ &= \frac{H_k \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{K}k} z^{-1}\right) + H_k^* \left(1 - e^{j\frac{2\pi}{K}k} z^{-1}\right)}{1 - 2z^{-1} \cos(2\pi k/K) + z^{-2}} = \\ &= \frac{H_k + H_k^* - \left(H_k e^{-j\frac{2\pi}{K}k} + H_k^* e^{j\frac{2\pi}{K}k}\right) z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos(2\pi k/K) + z^{-2}} = \\ &= \frac{2 \operatorname{Re}(H_k) - 2z^{-1} \left[\operatorname{Re}(H_k) \cos(2\pi k/K) + \operatorname{Im}(H_k) \sin(2\pi k/K)\right]}{1 - 2z^{-1} \cos(2\pi k/K) + z^{-2}}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Результат (6.7), который легко реализовать в виде первой или второй прямой формы, позволяет (совместно с (6.6)) быстро и просто строить структурные схемы цифровых фильтров по заданной частотной выборке. Такая структурная схема в общем виде приведена на рис.13. Однако рассматриваемая методика, обладая некоторыми преимуществами в расчетной части, является менее экономичной (по количеству сумматоров и элементов задержки), чем непосредственное построение трансверсального фильтра с коэффициентами, определяемыми из системы уравнений (6.3). Кроме этого, следует иметь в виду, что в выражении (6.7) полюсы передаточной характеристики компенсируются нулями «только на бумаге», то есть при абсолютно точных вычислениях. В реальных цифровых фильтрах коэффициенты A , B , и C (рис.13) будут заданы с некоторыми неизбежными погрешностями, и это приведет к тому, что полюсы передаточной характеристики не будут точно приходиться на ее нули, и более того, могут оказаться за единичной окружностью, что может фатально сказаться на устойчивости проектируемого фильтра.

Приведенные соображения заставляют отдать предпочтение варианту метода частотной выборки, основывающемуся на решении системы уравнений (6.3) и последующей реализации трансверсального фильтра.

При использовании метода частотной выборки значения частотной характеристики синтезированного фильтра, конечно, идеально совпадают с заданными значениями. Однако в промежутках между выбранными частотами частотная характеристика может вести себя достаточно сложным, и, как показывает практика, весьма и весьма неожиданным образом, что снижает практическую ценность метода частотной выборки.

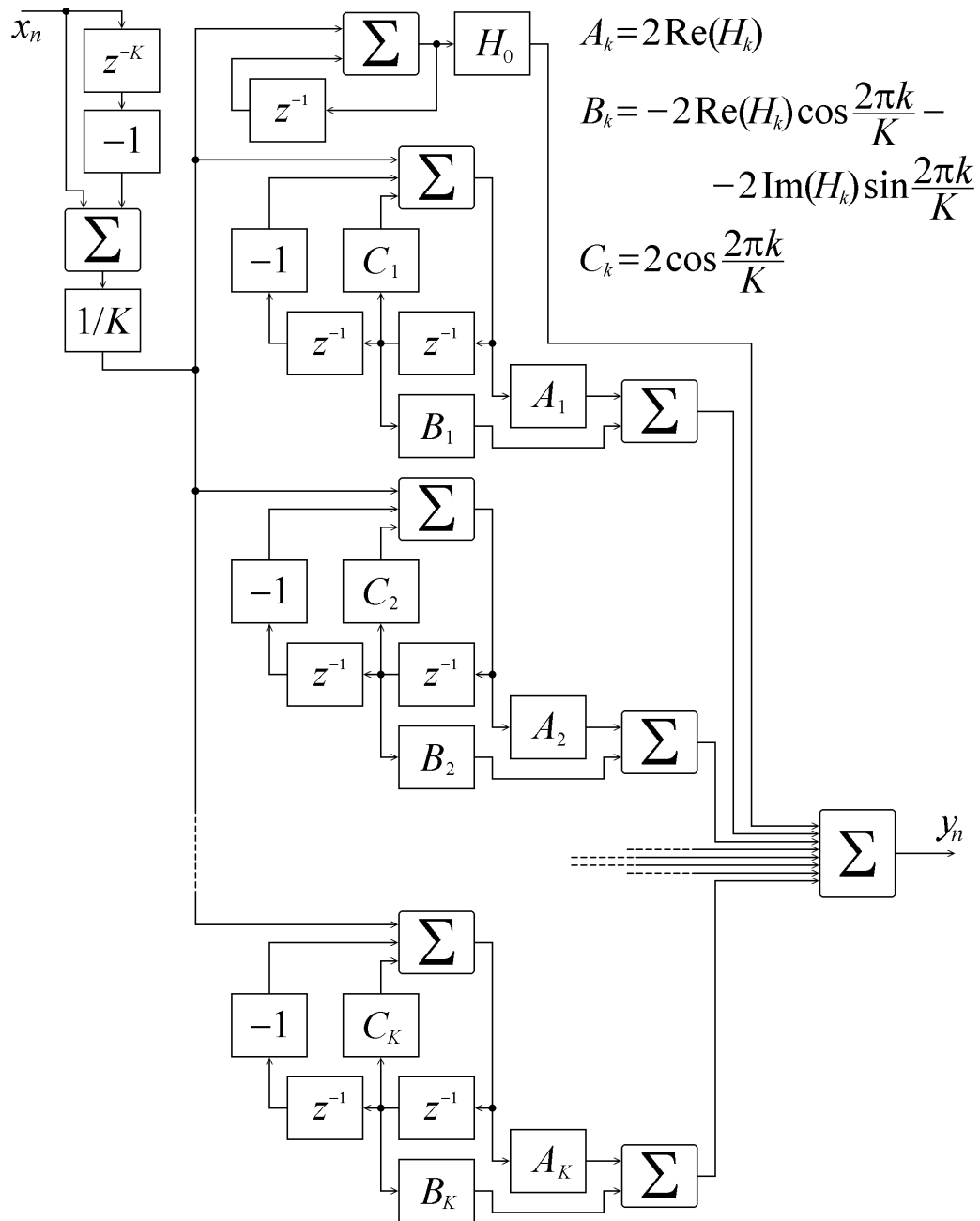


Рис. 13. Синтез КИХ-фильтров методом частотной выборки (параметр K в данном случае имеет нечетное значение).

Сформулируем вкратце основные этапы проектирования цифрового фильтра методом частотной выборки.

1. Сделаем выборку частот ω_k ($k = 0, \dots, K-1$) и соответствующие ей значения частотной характеристики $H_k = H(\omega_k)$.

2. Из системы уравнений (6.3) найдем отсчеты импульсной характеристики h_n .

3. Построим трансверсальный цифровой фильтр с рассчитанными коэффициентами h_n .

Контрольные вопросы и задачи.

1. БИХ- или КИХ-фильтры рассчитываются методом частотной выборки?
2. Может ли в результате применения метода частотной выборки получиться рекурсивный цифровой фильтр?
3. Можно ли схему рис.13 представить в виде первой или второй прямой формы?
4. Какими преимуществами по сравнению с методом взвешивания обладает метод частотной выборки?
5. Как обеспечить устойчивость цифрового фильтра при применении метода частотной выборки?
6. Предложите частотную выборку из 10 точек для реализации трансверсального цифрового фильтра с частотной характеристикой:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega\Delta < \pi/10; \\ 0 & \text{при } \omega\Delta > \pi/10. \end{cases}$$

7. Пригодна ли для решения задачи 6 частотная выборка, приведенная в таблице?

ω	0	$\pi/25\Delta$	$\pi/20\Delta$	$\pi/15\Delta$	$\pi/10\Delta$	$\pi/5\Delta$	$\pi/2\Delta$	π/Δ	$3\pi/2\Delta$	$4\pi/5\Delta$
$H(\omega)$	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0

8. Можно ли, используя метод частотной выборки, проектировать цифровые фильтры с линейной фазово-частотной характеристикой?
9. К чему должно приводить увеличение точек частотной выборки?
10. Как соотносятся исходная частотная характеристика и частотная характеристика цифрового фильтра, построенного методом частотной выборки?

7. Методы отображения дифференциалов.

Большое количество методов проектирования цифровых фильтров опирается на известные из теории цепей и сигналов (или теоретические основы радиотехники, [С.И.Баскаков. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 2000, 462с.]) методы проектирования аналоговых (непрерывных) фильтров. Напомним без вывода некоторые основные положения теории непрерывных цепей (для сравнения будем напоминать соответствующие свойства цифровых систем):

<p>Для непрерывных сигналов существует линейное преобразование Лапласа, ставящее сигналу в соответствие некоторую вещественную функцию, определенную на комплексной плоскости:</p> $\mathbf{X}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt.$	<p>Для дискретных сигналов существует z-преобразование, ставящее сигналу в соответствие некоторую вещественную функцию, определенную на комплексной плоскости:</p> $\mathbf{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}.$
<p>Если непрерывный сигнал $x(t)$ имеет преобразование Лапласа $\mathbf{X}(s)$, то его производная $dx(t)/dt$ имеет преобразование Лапласа $s\mathbf{X}(s)$.</p>	<p>Если дискретный сигнал x_n имеет z-преобразование $\mathbf{X}(z)$, то его задержанный сигнал x_{n-1} имеет z-преобразование $z^{-1}\mathbf{X}(z)$.</p>
<p>Спектр непрерывного сигнала</p> $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ <p>представляет собой значения его преобразования Лапласа, взятые на мнимой оси $s = j\omega$.</p>	<p>Спектр дискретного сигнала</p> $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n \Delta}$ <p>представляет собой значения его z-преобразования, взятые на единичной окружности $z = e^{j\omega}$.</p>
<p>Линейные инвариантные аналоговые цепи полностью характеризуются импульсной характеристикой $h(t)$, причем входной (x) и выходной (y) сигналы цепи связаны соотношением:</p> $y(t) = x(t) * h(t).$	<p>Линейные инвариантные дискретные цепи полностью характеризуются импульсной характеристикой h_n, причем входной (x) и выходной (y) сигналы цепи связаны соотношением:</p> $y_n = x_n * h_n.$
<p>Преобразование Лапласа импульсной характеристики аналоговой цепи называется передаточной характеристикой цепи $\mathbf{H}(s)$, преобразования Лапласа входного и выходного сигналов связаны друг с другом передаточной характеристикой:</p> $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{X}(s)\mathbf{H}(s).$	<p>Z-преобразование импульсной характеристики дискретной цепи называется передаточной характеристикой цепи $\mathbf{H}(z)$, z-преобразования входного и выходного сигналов связаны друг с другом передаточной характеристикой:</p> $\mathbf{Y}(z) = \mathbf{X}(z)\mathbf{H}(z).$

Так же, как в случае с дискретными системами, в непрерывных системах принято выделять цепи с сосредоточенными параметрами, которые строятся из элементарных цепей, входной и выходной сигналы которых связаны линейными дифференциальными соотношениями. Подавляющее большинство аналоговых цепей, встречающихся на практике, являются цепями с сосредоточенными параметрами. Приведем основные свойства цепей с сосредоточенными параметрами.

<p>Передаточная характеристика линейной аналоговой цепи с сосредоточенными параметрами имеет вид отношения полиномов от аргумента s:</p> $H(s) = \frac{P_1(s)}{P_2(s)}.$	<p>Передаточная характеристика линейной дискретной цепи с сосредоточенными параметрами имеет вид отношения полиномов от аргумента z^{-1}:</p> $H(z) = \frac{P_1(z^{-1})}{P_2(z^{-1})}.$
<p>Аналоговая цепь с сосредоточенными параметрами является устойчивой тогда и только тогда, если ее передаточная характеристика не имеет полюсов в правой части s-плоскости: $\text{Re}(s) > 0$.</p>	<p>Дискретная цепь с сосредоточенными параметрами является устойчивой тогда и только тогда, если ее передаточная характеристика не имеет полюсов за пределами единичной окружности z-плоскости: $z > 1$.</p>

Теория аналоговых цепей обладает большим количеством рецептов построения фильтров с заданными свойствами (фильтры Бесселя, Баттерворта, Чебышева, фильтры низких и высоких частот, полосовые и заградительные фильтры, [У.Титце, К.Шенк. Полупроводниковая схемотехника: Справочное пособие. – М.: Мир, 1982, с.185]). Всеми этими рецептами можно было бы воспользоваться, если бы удалось найти подходящее преобразование из s -плоскости в z -плоскость. Исходя из указанных свойств аналоговых и дискретных цепей, это преобразование должно обладать следующими свойствами.

1) Мнимая ось s -плоскости должна отображаться в единичную окружность z -плоскости.

2) Левая полуплоскость s -плоскости $\text{Re}(s) < 0$ должна отображаться во внутреннюю часть единичного круга z -плоскости $|z| < 1$.

3) Преобразование должно быть дробно-рациональным, поскольку именно такое преобразование будет отображать отношение полиномов от аргумента s в отношение полиномов от аргумента z^{-1} , что позволит реализовывать цифровые фильтры с сосредоточенными параметрами.

В качестве искомого преобразования можно предложить замену производной по времени конечной разностью:

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta}.$$

Если сделать преобразование Лапласа левой части этого выражения и z -преобразование правой части, то можно получить:

$$s\mathbf{X}(s) \rightarrow \frac{z-1}{\Delta} \mathbf{X}(z),$$

откуда и следует явный вид требуемого преобразования:

$$s \rightarrow \frac{z-1}{\Delta}, \quad (7.1)$$

откуда следует обратное преобразование:

$$z \leftarrow s\Delta + 1. \quad (7.1a)$$

Описанный метод носит название метод *прямой разности*. Из соотношения (7.1a) следует, что левая полуплоскость s -плоскости переходит в левую полуплоскость $\text{Re}(z) < 1$ z -плоскости, а мнимая ось s -плоскости – в пря-

мую $\text{Re}(z) = 1$ z -плоскости, то есть не выполняются сразу два из сформулированных требований.

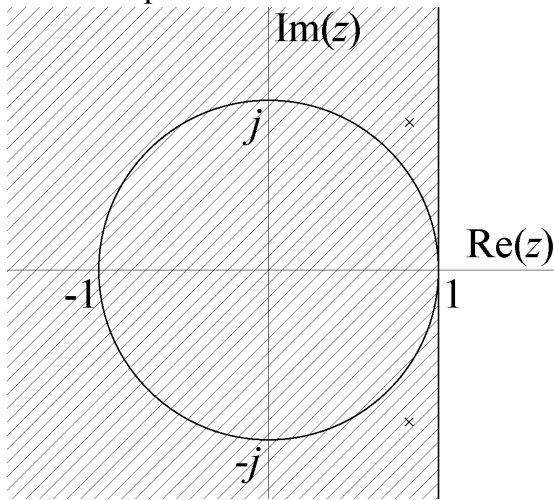


Рис.14. Преобразование $s \rightarrow z$ в методе прямой разности.

Полюсы передаточной характеристики аналогового фильтра, лежащие в левой полуплоскости, могут отображаться в полюсы передаточной характеристики цифрового фильтра, лежащие вне единичной окружности, как это изображено на рис.14 (символы \times), то есть при использовании метода прямой разности устойчивый аналоговый фильтр может отображаться в неустойчивый цифровой.

Как видно из рис.14, условия 1) и 2) выполняются вблизи точки $z = 1$ комплексной z -плоскости, то есть при устремлении к нулю интервала дискретизации по времени метод прямой разности должен давать удовлетворительные результаты.

От некоторых недостатков метода прямой разности свободен метод *обратной разности*, в котором производная по времени аппроксимируется разностным выражением:

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta},$$

что приводит к явному виду прямого и обратного преобразований:

$$s \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{\Delta}, \quad (7.2)$$

$$z \leftarrow \frac{1}{1 - s\Delta}. \quad (7.2a)$$

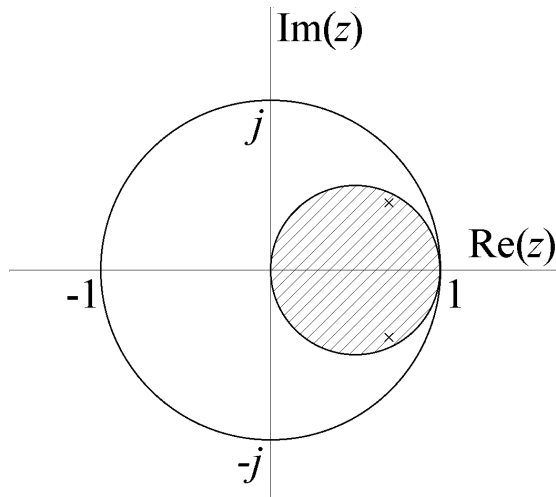


Рис.15. Преобразование $s \rightarrow z$ в методе обратной разности.

Как видно из рис.15, образом мнимой оси s -плоскости на z -плоскости является окружность с центром в точке $z = 1/2$ и радиусом $1/2$. В самом деле, действительная часть точки образа равна:

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \text{Re}\left(\frac{1}{1 + j\omega\Delta}\right) = \text{Re}\left(\frac{1 + j\omega\Delta}{1 + (\omega\Delta)^2}\right) = \\ &= \frac{1}{1 + (\omega\Delta)^2}, \end{aligned}$$

мнимая часть, соответственно, равна:

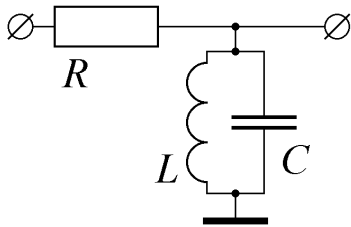
$$\text{Im} = \frac{\omega\Delta}{1 + (\omega\Delta)^2},$$

и они удовлетворяют соотношению:

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{Re}-\frac{1}{2}\right)^2 + \operatorname{Im}^2 &= \frac{1}{(1+(\omega\Delta)^2)^2} - \frac{1}{1+(\omega\Delta)^2} + \frac{1}{4} + \frac{(\omega\Delta)^2}{(1+(\omega\Delta)^2)^2} = \\ &= \frac{1+(\omega\Delta)^2}{(1+(\omega\Delta)^2)^2} - \frac{1+(\omega\Delta)^2}{(1+(\omega\Delta)^2)^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Точка $s = 0$ при этом отображается в точку $z = 1 = e^{j0}$, при устремлении $s \rightarrow \infty$ точка z стремится к нулю сверху $z \rightarrow j0$, при $s \rightarrow -\infty$ она стремится к нулю снизу $z \rightarrow -j0$. При таком отображении левая полуплоскость s -плоскости отображается во внутреннюю часть малой окружности рис.16, то есть все полюсы устойчивого аналогового фильтра отображаются заведомо во внутреннюю часть единичной окружности z -плоскости. Таким образом, при использовании метода обратной разности устойчивость аналогового фильтра гарантирует устойчивость цифрового. Тем не менее, как и в методе прямой разности, образ мнимой оси s -плоскости совпадает с единичной окружностью только в окрестности точки $z = 1$, то есть для совпадения частотных характеристик аналогового и цифрового фильтров необходимо, как и в методе прямой разности, уменьшать интервал дискретизации по времени Δ .

Пример 12. Рассмотрим аналоговую цепь, изображенную на рис.16.



Передаточная характеристика изображенного фильтра содержит два нуля и два полюса:

$$H(s) = \frac{s \frac{L}{R}}{1 + s \frac{L}{R} + s^2 LC} = \frac{s \frac{1}{RC}}{\left(s + \frac{L + \sqrt{L^2 - 4R^2LC}}{2RLC}\right)\left(s + \frac{L - \sqrt{L^2 - 4R^2LC}}{2RLC}\right)}.$$

Выберем для определенности параметры рассматриваемой цепи:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 10 \text{ Гц}; \quad RC = 0.025c.$$

Рис.16. Непрерывная цепь второго порядка.

При таком выборе параметров передаточная характеристика цепи принимает вид:

$$H(s) = \frac{s \cdot 0.0101c}{1 + s \cdot 0.0101c + s^2 \cdot 0.01c^2 / (4\pi^2)} = \frac{s \cdot 40 \text{ Гц}}{(s + (20 + 59.6j)\text{Гц})(s + (20 - 59.6j)\text{Гц})}. \quad (7.3)$$

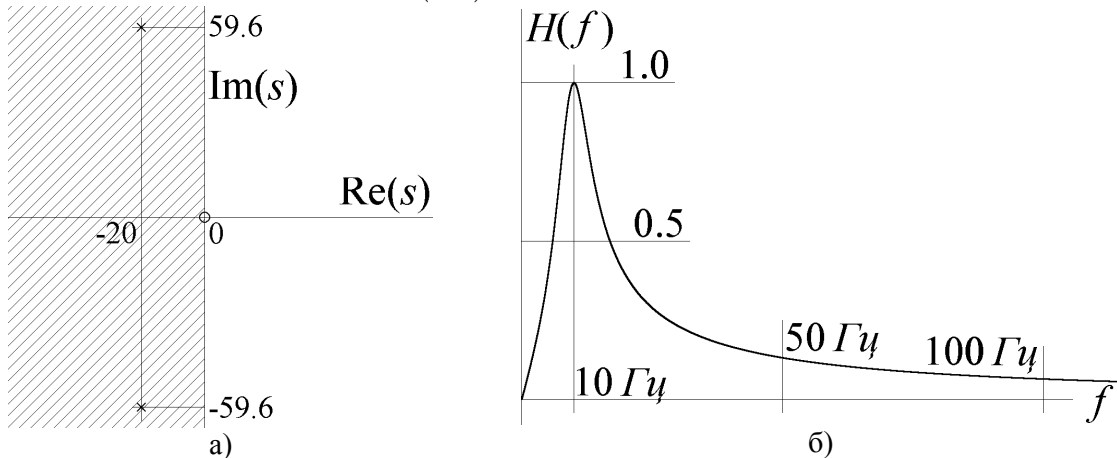


Рис.17. Расположение нулей и полюсов передаточной характеристики фильтра рис.16 (а) и его амплитудно-частотная характеристика (б)

Теперь передаточная характеристика имеет один нуль $z = 0$ и два комплексных полюса, лежащие в ее левой полуплоскости. Расположение полюсов на s -плоскости и амплитудно-частотная характеристика рассматриваемого фильтра приведены на рис.17.

Применим к передаточной характеристике (7.3) метод прямой разности:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{((z-1)/\Delta)0.0101c}{1 + ((z-1)/\Delta)0.0101c + ((z-1)/\Delta)^2 0.01c^2/(4\pi^2)} = \\
 &= \frac{(z-1)(0.0101c/\Delta)}{1 + (z-1)(0.0101c/\Delta) + (z-1)^2 0.01c^2/(2\pi\Delta)^2} = \\
 &= \frac{(z^{-1} - z^{-2})}{z^{-2}(\Delta/0.0101c) + (z^{-1} - z^{-2}) + (1 - 2z^{-1} + z^{-2})0.025c/\Delta} = \\
 &= \frac{(z^{-1} - z^{-2})}{z^{-2}(\Delta/0.0101c - 1 + 0.025c/\Delta) + z^{-1}(1 - 0.05c/\Delta) + 0.025c/\Delta}.
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Цифровой фильтр с полученной передаточной характеристикой легко реализовать, используя прямые формы, или каким-либо другим способом. При этом выбор интервала дискретизации Δ непосредственно влияет на расположение нулей и полюсов передаточной характеристики синтезированного фильтра (так, что он может оказаться даже неустойчивым), а также на форму его частотной характеристики. На рис.18 изображено расположение нулей и полюсов и амплитудно-частотная характеристика синтезированного фильтра при различных значениях интервала дискретизации.

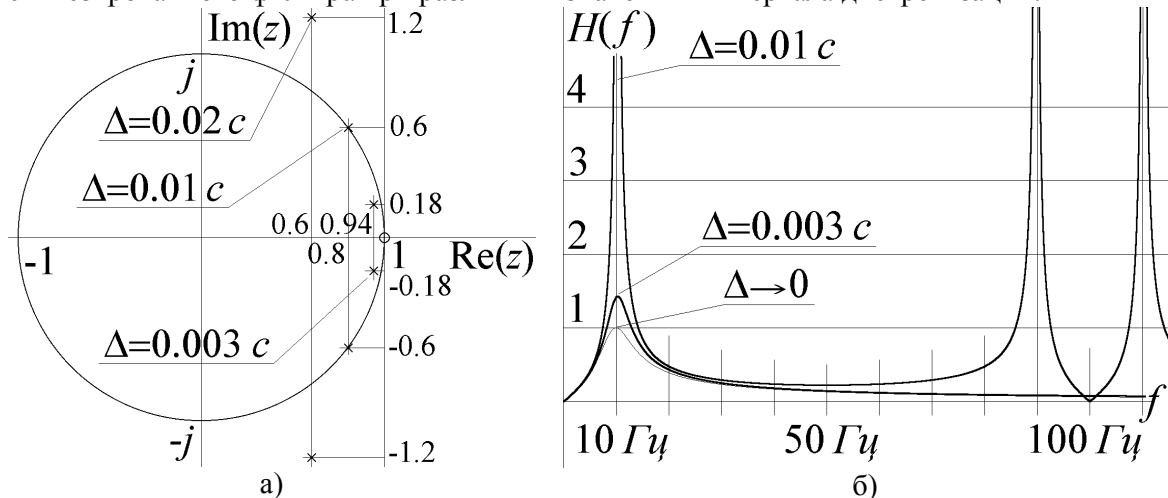


Рис.18. Расположение нулей и полюсов передаточной характеристики (7.4) (а) и АЧХ соответствующего цифрового фильтра (б) при различных значениях Δ .

При выборе $\Delta = 0.02c$ передаточная характеристика цифрового фильтра содержит полюсы вне единичной окружности, поэтому говорить о частотной характеристике в этом случае не имеет смысла. Выбор $\Delta = 0.01c$ обеспечивает положение полюсов внутри окружности, однако они лежат очень близко к ней, поэтому форма АЧХ цифрового фильтра лишь отдаленно напоминает АЧХ исходного непрерывного фильтра. При таком значении Δ период частотной характеристики цифрового фильтра должен равняться $100 \Gamma\mu$, что наглядно демонстрирует рис.17б. При $\Delta = 0.003c$ форма АЧХ уже достаточно близка к требуемой. Дальнейшее уменьшение интервала дискретизации приводит к тому, что АЧХ цифрового фильтра все больше и больше стремится к АЧХ непрерывного прототипа и в пределе совпадает с ней, что показано тонкой линией на рис.18б.

Как явственно следует из примера, выбор достаточно маленького значения интервала дискретизации обеспечивает устойчивость синтезированного цифрового фильтра.

Пример 13. Применим к непрерывному фильтру рис.16 метод обратной разности. Для этого сделаем в выражении (7.3) замену (7.2):

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{\left((1-z^{-1})/\Delta\right) 0.0101c}{1 + \left((1-z^{-1})/\Delta\right) 0.0101c + \left((1-z^{-1})/\Delta\right)^2 0.01c^2/(4\pi^2)} = \\
 &= \frac{(1-z^{-1})0.0101c}{\Delta + (1-z^{-1}) 0.0101c + (1-2z^{-1} + z^{-2}) 0.0002533c^2/\Delta} = \\
 &= \frac{(1-z^{-1})1c}{z^{-2} 0.025c^2/\Delta - z^{-1}(1c + 0.05c^2/\Delta) + 100\Delta + 1c + 0.025c^2/\Delta}.
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Расположение нулей и полюсов получившегося при этом цифрового фильтра, а также его АЧХ при различных значениях интервала дискретизации приведены на рис.19.

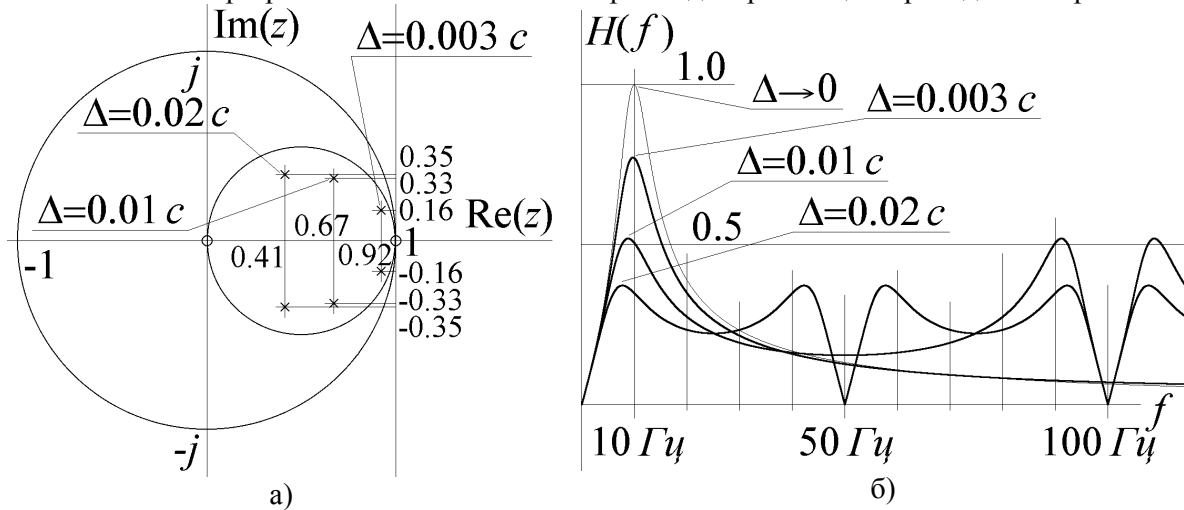


Рис.19. Расположение нулей и полюсов передаточной характеристики (7.5) (а) и АЧХ соответствующего цифрового фильтра (б) при различных значениях Δ .

Как и в примере 12, уменьшение интервала дискретизации приводит к все большему приближению АЧХ цифрового фильтра к АЧХ непрерывного прототипа. Как и на рис.18б, на рис.19б тонкой линией изображена АЧХ непрерывного фильтра, к которой стремится АЧХ цифрового фильтра при уменьшении интервала дискретизации. Частотная характеристика цифрового фильтра, естественно, обладает периодичностью с периодом $1/\Delta$. Синтезированный цифровой фильтр, как уже отмечалось, остается устойчивым при любом выборе интервала дискретизации, поскольку его полюсы заведомо лежат внутри единичного круга. Некоторое недоумение может вызвать наличие дополнительного полюса в точке $z = 0$. Этот факт, впрочем, легко объяснить тем, что исходная передаточная характеристика (7.3) стремится к 0 при $s \rightarrow \infty$, из чего следует, что передаточная характеристика полученного цифрового фильтра будет стремиться к 0 при $z \rightarrow 0$.

Методы прямой и обратной разностью дают удовлетворительный результат только при выборе достаточно малого значения интервала дискретизации. Это связано в первую очередь с тем, что образ мнимой оси s -плоскости не совпадает с единичной окружностью z -плоскости. Поэтому актуальным остается поиск преобразования $s \rightarrow z$, отвечающего всем сформулированным условиям. Хотя, даже если это преобразование будет отвечать всем условиям, частотная характеристика цифрового фильтра не может совпадать с частотной характеристикой аналогового прототипа, поскольку первая является периодичной, а вторая – нет.

Знакомство с методами вычислительной математики наталкивает на мысль использовать симметричную аппроксимацию производной:

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\Delta}.$$

Такая аппроксимация приводит к преобразованию:

$$s \rightarrow \frac{z - z^{-1}}{2\Delta}.$$

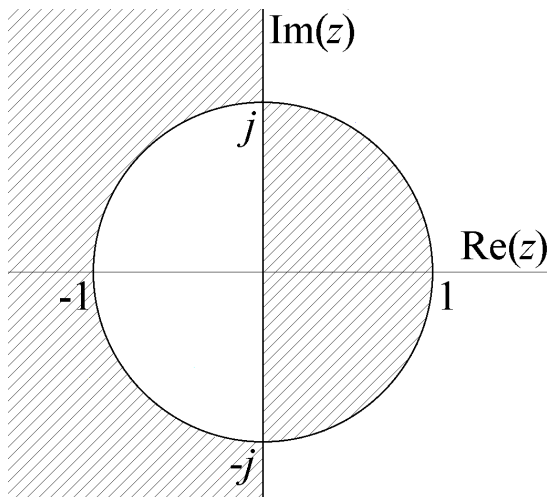


Рис.20. Преобразование $s \rightarrow z$ при использовании симметричной разностной аппроксимации.

Однако использование симметричной аппроксимации производной приводит к тому, что левая полуплоскость s -плоскости преобразуется в многосвязную область z -плоскости, как это показано на рис.20. При этом каждая точка s -плоскости переходит в две точки z -плоскости, так что преобразование даже не сохраняет количества нулей и полюсов передаточной характеристики. Мнимая ось s -плоскости отображается сразу на единичную окружность и на мнимую ось z -плоскости, а точка $s = \infty$ — одновременно в две точки — $z = \infty$ и $z = 0$.

Таким образом, применение симметричной разностной аппроксимации не приносит ожидаемых результатов. Это же можно сказать и об аппроксимациях более высоких порядков.

Тем не менее, известно и широко используется преобразование $s \rightarrow z$, удовлетворяющее всем необходимым требованиям. Это так называемое *билинейное преобразование*:

$$s \rightarrow \frac{2}{\Delta} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (7.6)$$

Выражение (7.6) допускает обращение:

$$z \leftarrow \frac{\frac{2}{\Delta} + s}{\frac{2}{\Delta} - s},$$

из вида которого легко сделать вывод, что точки мнимой оси $s = j\omega$ билинейное преобразование переводит в точки единичной окружности $|z|=1$, а точки левой полуплоскости $\text{Re}(s) < 0$ — в область, ограниченную единичной окружностью $|z| < 1$.

Итак, точка $s = j\omega$ s -плоскости должна преобразовываться в точку $z = e^{j\varphi}$ z -плоскости:

$$j\omega \rightarrow \frac{2}{\Delta} \frac{1 - e^{-j\varphi}}{1 + e^{-j\varphi}} = \frac{2}{\Delta} \frac{e^{j\varphi/2} - e^{-j\varphi/2}}{e^{j\varphi/2} + e^{-j\varphi/2}} = \frac{2}{\Delta} \frac{2j \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{2}{\Delta} j \text{tg}(\varphi/2). \quad (7.7)$$

Полученное преобразование позволяет сделать вывод, что величина $\operatorname{tg}\varphi$, где φ – аргумент точки единичной окружности z -плоскости, соответствует параметру $\omega\Delta$, где ω – частота частотной характеристики непрерывного фильтра. В частности, бесконечно большая частота $\omega \rightarrow \pm\infty$ в частотной характеристике непрерывного фильтра соответствует частоте $\pm\pi/\Delta$ в частотной характеристике полученного цифрового фильтра.

Пример 14. Применим билинейное преобразование к непрерывному фильтру рис.16 с передаточной характеристикой (7.3). Для этого подставим в (7.3) выражение (7.6):

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{\frac{2}{\Delta} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} 0.0101c}{1 + \frac{2}{\Delta} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} 0.0101c + \left(\frac{2}{\Delta} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 0.0002533c^2} = \\
 &= \frac{\Delta(1+z^{-1})(1-z^{-1})0.0202c}{\Delta^2(1+z^{-1})^2 + \Delta(1+z^{-1})(1-z^{-1})0.0202c + (1-z^{-1})^2 0.0010132c^2} = \\
 &= \frac{\Delta(1-z^{-2})}{\Delta^2(1+2z^{-1}+z^{-2}) 49.5 \Gamma\varrho + \Delta(1-z^{-2}) + (1-2z^{-1}+z^{-2}) 0.0502c} = \\
 &= \frac{\Delta(1-z^{-2})}{z^{-2}(\Delta^2 49.5 \Gamma\varrho - \Delta + 0.0502c) + z^{-1}(\Delta^2 99 \Gamma\varrho - 0.1004c) + \Delta^2 49.5 \Gamma\varrho + \Delta + 0.0502c}.
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

На рис.21 приведено расположение нулей и полюсов цифрового фильтра, полученного после применения билинейного преобразования к передаточной характеристике (7.3), а также его АЧХ при различных значениях интервала дискретизации.

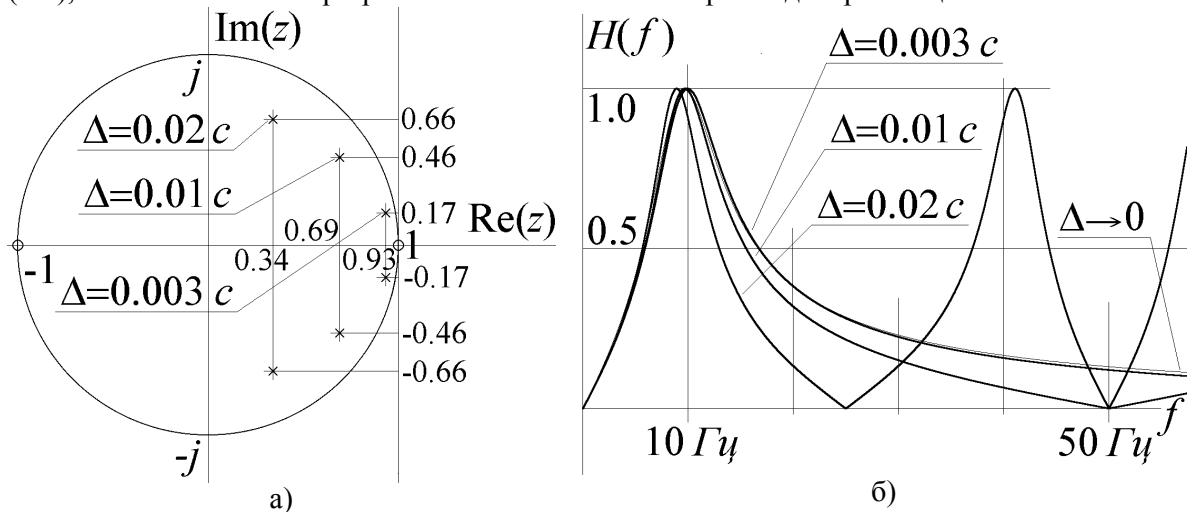


Рис.21. Расположение нулей и полюсов передаточной характеристики (7.8) (а) и АЧХ соответствующего цифрового фильтра (б) при различных значениях Δ .

Как и следовало ожидать, и что прекрасно демонстрирует рис.21б, метод билинейного преобразования приводит к гораздо лучшей аппроксимации исходной частотной характеристики, поскольку он отображает мнимую ось s -плоскости непосредственно в единичную окружность z -плоскости. Как и в примере 13, передаточная характеристика полученного цифрового фильтра содержит дополнительный нуль $z = -1$, поскольку именно эта точка соответствует точке s -плоскости $s \rightarrow \infty$. Точка $z = -1$, однако, лежит непосредственно на единичной окружности, поэтому частотная характеристика цифрового фильтра

обращается в ноль на частоте $\omega = \pi/\Delta$, или $f = \omega/(2\pi) = 1/(2\Delta)$, что отчетливо видно на рис.21б.

Итак, методы отображения дифференциалов позволяют по передаточной характеристике непрерывного фильтра построить цифровой фильтр. При этом абсолютно точного совпадения частотных характеристик непрерывного и цифрового фильтров добиться невозможно, наилучшие результаты достигаются при использовании билинейного преобразования. При устремлении к нулю интервала дискретизации частотная характеристика цифрового фильтра стремится к частотной характеристике непрерывного фильтра.

Сформулируем последовательность действий при использовании методов отображения дифференциалов.

1) Исходными данными является передаточная характеристика непрерывного прототипа проектируемого фильтра.

2) В передаточной характеристике непрерывного фильтра производится замена $s \rightarrow \frac{2}{\Delta} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ (либо, по каким-либо причинам, одна из замен

$s \rightarrow \frac{z-1}{\Delta}$, $s \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{\Delta}$, или $s \rightarrow \frac{z-z^{-1}}{2\Delta}$).

3) По полученной передаточной характеристике строится цифровой фильтр.

Контрольные вопросы и задачи.

1. Может ли в результате использования метода обратной разности получиться неустойчивый цифровой фильтр?
2. Докажите, что для любого аналогового прототипа можно подобрать такой интервал дискретизации Δ , что применение метода прямой разности приведет к устойчивому цифровому фильтру.
3. Может ли применение одного из методов отображения дифференциалов привести к трансверсальному цифровому фильтру?
4. Почему методы отображения дифференциалов не используют сложных нелинейных преобразований вида $s \rightarrow f(z)$?
5. Объясните изменение периода частотной характеристики при изменении интервала дискретизации Δ на рис.19, рис.21.
6. Почему при использовании метода обратной разности и метода билинейного преобразования передаточная характеристика цифрового фильтра содержит на один ноль больше, чем передаточная характеристика аналогового прототипа?
7. Всегда ли цифровой фильтр, полученный в результате одного из методов отображения дифференциалов, будет иметь чисто действительные коэффициенты?
8. Какую частотную характеристику будет иметь цифровой фильтр, полученный в результате применения метода билинейного преобразования к аналоговому фильтру с периодической частотной характеристикой?
9. Можно ли использовать методы отображения дифференциалов для построения цифрового аналога длинной линии?
10. Частотная характеристика цифрового фильтра из примера 14 обращается в 0 в точке $\omega = \pi/\Delta$. Является ли это неотъемлемой особенностью использования метода билинейного преобразования?

8. Метод инвариантного преобразования импульсной характеристики.

Как уже отмечалось в п.7, передаточная характеристика непрерывных фильтров с сосредоточенными параметрами представляет собой отношение полиномов, которое можно представить в виде:

$$\begin{aligned} H_{\text{непр.}}(s) &= C \frac{\prod_{k=0}^{K-1} (s - z_k)}{\prod_{m=0}^{M-1} (s - p_m)} = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} a_k s^k}{\prod_{m=0}^{M-1} (s - p_m)} = \sum_{k=0}^{K-1} a_k s^k \frac{1}{\prod_{m=0}^{M-1} (s - p_m)} = \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} a_k s^k \sum_{m=0}^{M-1} \frac{b_m}{s - p_m} = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} a_k b_m \frac{s^k}{s - p_m}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Поскольку каждое слагаемое выражения (8.1) является преобразованием Лапласа экспоненты с показателем p_m , начинающийся в момент времени $t = 0$:

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{p_m t} \rightarrow s^k \int_0^{\infty} e^{p_m t} e^{-st} dt = s^k \int_0^{\infty} e^{(p_m - s)t} dt = s^k \frac{e^{(p_m - s)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty}}{p_m - s} = \frac{s^k}{s - p_m},$$

импульсная характеристика произвольного непрерывного фильтра с сосредоточенными параметрами представляет собой сумму конечного числа экспонент:

$$\begin{aligned} h_{\text{непр.}}(t) &= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} a_k b_m \frac{d^k e^{p_m t}}{dt^k} = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} a_k b_m (p_m)^k e^{p_m t} = \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} b_m e^{p_m t} \sum_{k=0}^{K-1} a_k (p_m)^k = \sum_{m=0}^{M-1} A_m e^{p_m t}, \quad (t \geq 0). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Метод инвариантного преобразования импульсной характеристики заключается в создании цифрового фильтра, дискретная импульсная характеристика которого совпадает с импульсной характеристикой непрерывного прототипа в точках $t = n\Delta$:

$$h_n = \Delta h_{\text{непр.}}(n\Delta) = \Delta \sum_{m=0}^{M-1} A_m e^{p_m n\Delta}, \quad (n \geq 0).$$

Такую импульсную характеристику будет иметь цифровой фильтр с передаточной характеристикой:

$$\begin{aligned} H(z) &= \Delta \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n} = \Delta \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \sum_{m=0}^{M-1} A_m e^{p_m n\Delta} = \Delta \sum_{m=0}^{M-1} A_m \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} e^{p_m n\Delta} = \\ &= \Delta \sum_{m=0}^{M-1} A_m \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_m \Delta} z^{-1})^n = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{A_m \Delta}{1 - e^{p_m \Delta} z^{-1}}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Итак, для построения цифрового фильтра по заданному непрерывному прототипу необходимо вычислить импульсную характеристику непрерывно-

го фильтра, представить ее в виде (8.2) и построить по параметрам полученного представления передаточную характеристику цифрового фильтра.

Пример 15. Вычислим импульсную характеристику $h(t)$ непрерывного фильтра, изображенного на рис.16. Для этого путем решения соответствующей системы дифференциальных уравнений найдем реакцию фильтра на единичный перепад, то есть переходную характеристику:

$$\theta(t) = \frac{2e^{-t/2RC}}{\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}} \sin\left(\frac{t\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}}{2RC}\right),$$

и продифференцируем ее по времени:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{e^{-t/2RC}}{RC} \left(\cos\left(\frac{t\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}}{2RC}\right) - \frac{1}{\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}} \sin\left(\frac{t\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}}{2RC}\right) \right) = \\ &= \frac{e^{-t/2RC}}{RC} \left(\frac{1}{2} \exp\left(j \frac{t\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}}{2RC}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(-j \frac{t\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}}{2RC}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}} \frac{1}{2j} \exp\left(j \frac{t\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}}{2RC}\right) + \frac{1}{\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}} \frac{1}{2j} \exp\left(-j \frac{t\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}}{2RC}\right) \right) = \\ &= \frac{e^{-t/2RC}}{2RC} \left(\exp\left(j \frac{t\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}}{2RC}\right) \left(1 - \frac{1}{j\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}}\right) + \exp\left(-j \frac{t\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}}{2RC}\right) \left(1 + \frac{1}{j\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2RC} \left(1 - \frac{1}{j\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}}\right) \exp\left(t \left(-\frac{1}{2RC} + j \frac{\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}}{2RC}\right)\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2RC} \left(1 + \frac{1}{j\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}}\right) \exp\left(t \left(-\frac{1}{2RC} - j \frac{\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}}{2RC}\right)\right). \end{aligned}$$

Как и ожидалось, импульсная характеристика фильтра имеет вид (8.2). Как и прежде, выберем конкретные параметры рассматриваемого фильтра:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 10 \text{ Гц}; \quad RC = 0.025 \text{ с},$$

при этом импульсная характеристика фильтра приобретет более конкретный вид:

$$\begin{aligned} h(t) &= 20 \text{ Гц} (1 + j0.336) \exp(t(-20 \text{ Гц} + j59.6 \text{ Гц})) + \\ &\quad + 20 \text{ Гц} (1 - j0.336) \exp(t(-20 \text{ Гц} - j59.6 \text{ Гц})) = \\ &= A_1 \exp(p_1 t) + A_2 \exp(p_2 t). \end{aligned}$$

На основе полученной импульсной характеристики построим передаточную характеристику цифрового фильтра:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\Delta A_1}{1 - e^{p_1 \Delta} z^{-1}} + \frac{\Delta A_2}{1 - e^{p_2 \Delta} z^{-1}} = \frac{\Delta A_1 + \Delta A_2 - z^{-1}(A_1 e^{p_2 \Delta} + A_2 e^{p_1 \Delta}) \Delta}{1 - z^{-1}(e^{p_2 \Delta} + e^{p_1 \Delta}) + z^{-2} e^{(p_1 + p_2) \Delta}} = \\ &= \frac{40 \text{ Гц} \Delta - z^{-1} e^{-20 \text{ Гц} \Delta} (40 \text{ Гц} \cos(59.6 \text{ Гц} \Delta) + 13.44 \text{ Гц} \sin(59.6 \text{ Гц} \Delta)) \Delta}{1 - z^{-1} 2e^{-20 \text{ Гц} \Delta} \cos(59.6 \text{ Гц} \Delta) + z^{-2} e^{-40 \text{ Гц} \Delta}}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Как и при использовании методов отображения дифференциалов, передаточная характеристика проектируемого фильтра зависит от выбора интервала дискретизации Δ . На

рис.22 изображено, как и в примерах 12-14, расположение нулей и полюсов цифровых фильтров, полученных применением к непрерывному прототипу метода инвариантного преобразования импульсной характеристики. Значения интервала дискретизации выбраны теми же, как и в предыдущих примерах.

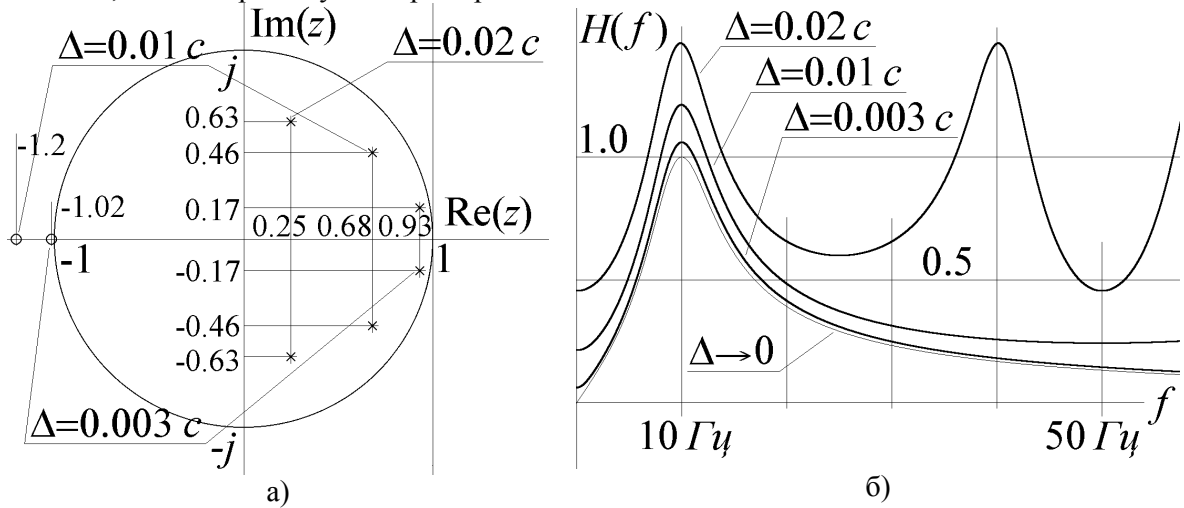


Рис.22. Расположение нулей и полюсов передаточной характеристики (8.4) (а) и АЧХ соответствующего цифрового фильтра (б) при различных значениях Δ .

Частотная характеристика полученного цифрового фильтра, как и в предыдущих примерах, стремится к частотной характеристике непрерывного прототипа при уменьшении интервала дискретизации. В отличие от примеров 12-14, передаточная характеристика цифрового фильтра не имеет нуля в точке $z = 1$, ее единственный ноль вообще не лежит на единичной окружности.

Как видно из сравнения рис.21б и рис.22б, метод инвариантного преобразования импульсной характеристики проигрывает методу билинейного преобразования в аппроксимации частотной характеристики и его применение становится оправданным только в том случае, если первостепенное значение при проектировании цифрового фильтра имеет именно импульсная характеристика, которая воспроизводится при использовании метода инвариантного преобразования с абсолютной точностью.

Итак, для построения цифрового фильтра методом инвариантного преобразования импульсной характеристики необходимо:

1) Представить импульсную характеристику непрерывного фильтра-прототипа в виде (8.2), то есть в виде суперпозиции конечного числа экспонент (возможно, комплексных).

2) На основе параметров, полученных в п.1, построить передаточную характеристику (8.3) цифрового фильтра.

Контрольные вопросы и задачи.

1. Рекурсивными или нерекурсивными фильтрами являются фильтры, полученные путем использования метода инвариантного преобразования импульсной характеристики?
2. Постройте методом инвариантного преобразования импульсной характеристики дискретный аналог интегрирующей RC -цепочки. Сравните его частотную и импульсную характеристику с характеристиками фильтра, полученного в результате использования билинейного преобразования.
3. Может ли фильтр, полученный в результате применения метода инвариантного преобразования импульсной характеристики, являться неустойчивым?
4. Импульсная характеристика цифрового фильтра, построенного методом инвариантного преобразования, совпадает с импульсной характеристикой аналогового прототипа. Следует ли из этого, что их частотные характеристики совпадают?
5. Обладает ли фильтр, построенный методом инвариантного преобразования, свойством каузальности?
6. Можно ли использовать метод инвариантного преобразования для построения дискретного аналога длинной линии?
7. Произвольную ли импульсную характеристику можно использовать для применения метода инвариантного преобразования импульсной характеристики?
8. Совпадает ли количество нулей и полюсов у фильтра, полученного методом инвариантного преобразования и его аналогового прототипа?
9. Можно ли использовать метод инвариантного преобразования для построения фильтра, аналоговый прототип которого не имеет нулей передаточной характеристики?
10. Коэффициенты A_m в разложении (8.2) являются комплексными числами. Не может ли это привести к тому, что коэффициенты фильтра, полученного методом инвариантного преобразования, также будут комплексными?

9. Подбор нулей и полюсов передаточной характеристики.

Развитие вычислительной техники позволяет отойти от использования аналитически разработанных методов, описанных в п.5 – п.8. Действительно, задание нулей и полюсов передаточной характеристики полностью определяет ее (3.7), и, следовательно, частотную характеристику цифрового фильтра. Поэтому, варьируя число нулей и полюсов фильтра, а также их взаимное расположение, можно добиваться требуемой частотной характеристики. При этом следует учитывать, что приближение полюса передаточной характеристики к единичной окружности (естественно, с внутренней стороны) вызывает рост значения АЧХ на частоте, соответствующей аргументу полюса. Этот процесс проиллюстрирован на рис.23.

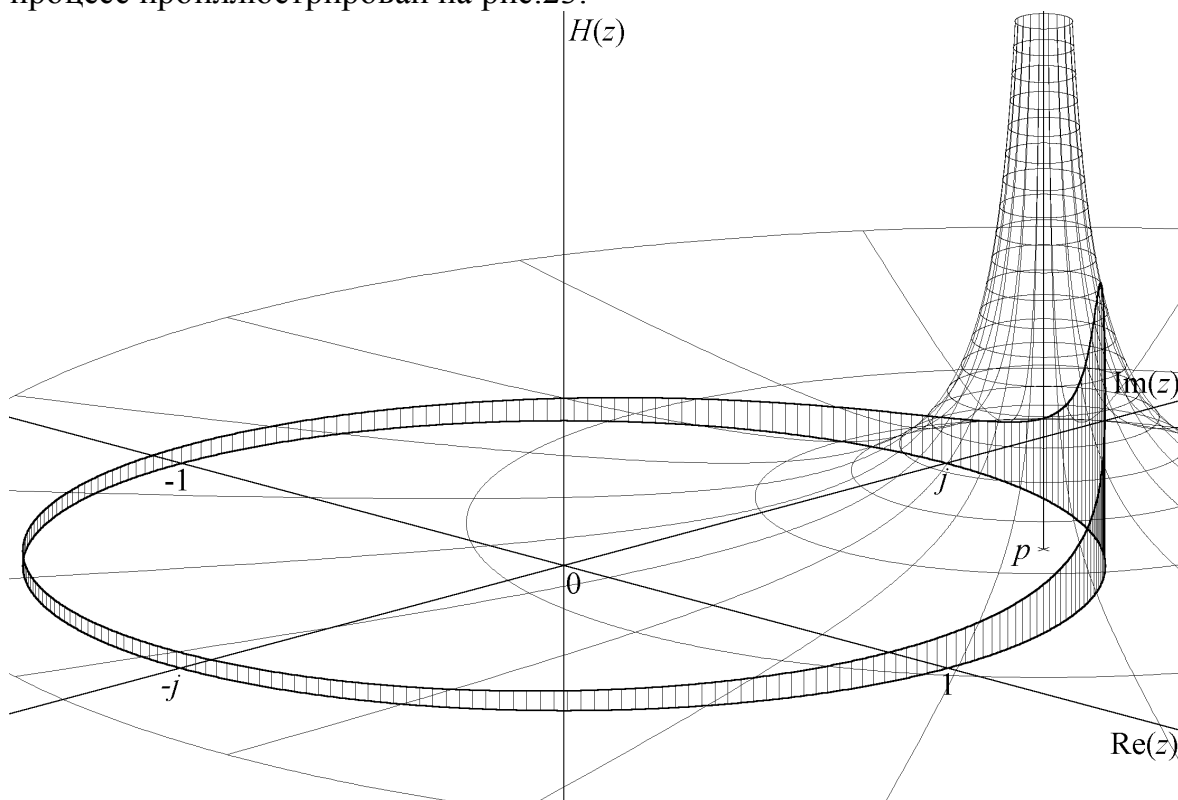


Рис.23. Образование выброса частотной характеристики цифрового фильтра при приближении полюса его передаточной характеристики p к единичной окружности (схематично).

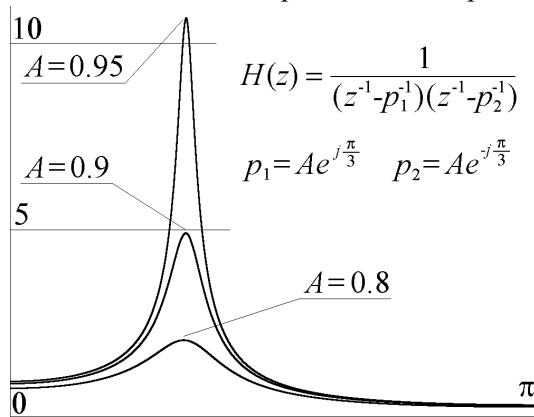


Рис.24. АЧХ фильтра второго порядка.

Таким образом, приближая полюс передаточной характеристики фильтра к единичной окружности (или отдаляя от нее), можно регулировать как величину, так и ширину выброса амплитудно-частотной характеристики. На рис.24 приведена АЧХ цифрового фильтра, передаточная характеристика которого содержит два комплексно сопряженных полюса. Различные кривые рис.24 соответствуют различным расстояниям от

полюсов до единичной окружности. Приближение полюсов к окружности приводит к увеличению добротности фильтра.

Совершенно аналогичная картина складывается при приближении к единичной окружности нуля передаточной характеристики. Собственно в нуле передаточная характеристика обращается в ноль, поэтому в его окрестности она принимает малые значения, и поэтому малые значения она принимает на проходящей вблизи единичной окружности, что приводит к возникновению провала в частотной характеристике фильтра.

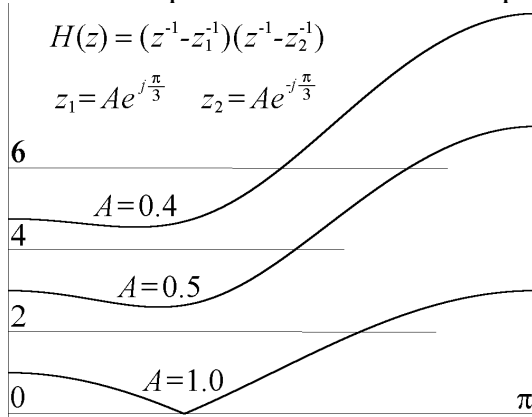


Рис.25. АЧХ цифрового фильтра с двумя нулями передаточной характеристики.

На рис.25 приведена АЧХ цифрового фильтра с двумя нулями передаточной характеристики. Если нули лежат на единичной окружности ($A = 1$), АЧХ обращается в соответствующей точке в ноль. Отдаление нулей от окружности приводит к тому, что в этой точке на АЧХ наблюдается провал тем большей глубины, чем ближе к единичной окружности находится полюс. В отличие от случая с полюсами, нули можно располагать как внутри, так и вне единичной окружности. К сожалению, используя только нули, трудно добиться высокодобротных (с узкой полосой частот) провалов частотной характеристики.

Таким образом, изменяя расположение нулей и полюсов, и, возможно, их количество, можно добиться требуемой частотной характеристики цифрового фильтра. При этом можно минимизировать разность между получаемой частотной характеристикой и требуемой. Аналогично можно создавать цифровые фильтры по заданной фазово-частотной характеристике, или по заданной импульсной характеристике, или по их совокупности, в зависимости от решаемой задачи.

Таким образом, изменяя расположение нулей и полюсов, и, возможно, их количество, можно добиться требуемой частотной характеристики цифрового фильтра. При этом можно минимизировать разность между получаемой частотной характеристикой и требуемой. Аналогично можно создавать цифровые фильтры по заданной фазово-частотной характеристике, или по заданной импульсной характеристике, или по их совокупности, в зависимости от решаемой задачи.

Все ранее рассмотренные примеры используют цифровые фильтры с действительными коэффициентами, обладающие действительной же импульсной характеристикой. Может создаться вполне оправданное впечатление, что действительность импульсной характеристики и коэффициентов – обязательное и необходимое требование физической реализуемости цифровых фильтров. Это, однако, не совсем так. Следует вспомнить, что дискретные сигналы и цифровые фильтры – лишь отражение объективной реальности и являются только моделью (достаточно четко разработанной). Любая же четко разработанная модель может быть технически реализована (не имеет значения, программно или аппаратно), будь то хоть недостижимые кардиналы и кватернионы.

Пример 16. Построим цифровой фильтр с одним комплексным полюсом, не имеющим сопряженной пары. Такой фильтр должен иметь передаточную характеристику $H(z) = 1/(z^{-1} - p^{-1})$ и описываться уравнением $y_n = py_{n-1} - px_n$. Структурная схема

фильтра формально должна иметь вид, изображенный на рис.26а. Однако параметр p , а также отсчеты входного и выходного сигналов должны иметь комплексные значения. Поэтому уравнение работы фильтра следует переписать, используя только действительные операции:

$$\operatorname{Re}(y_n) = \operatorname{Re}(p)\operatorname{Re}(y_{n-1}) - \operatorname{Im}(p)\operatorname{Im}(y_{n-1}) - \operatorname{Re}(p)\operatorname{Re}(x_n) + \operatorname{Im}(p)\operatorname{Im}(x_n);$$

$$\operatorname{Im}(y_n) = \operatorname{Re}(p)\operatorname{Im}(y_{n-1}) + \operatorname{Im}(p)\operatorname{Re}(y_{n-1}) - \operatorname{Re}(p)\operatorname{Im}(x_n) - \operatorname{Im}(p)\operatorname{Re}(x_n).$$

Полученную систему уравнений легко представить в виде схемы, изображенной на рис.26б.

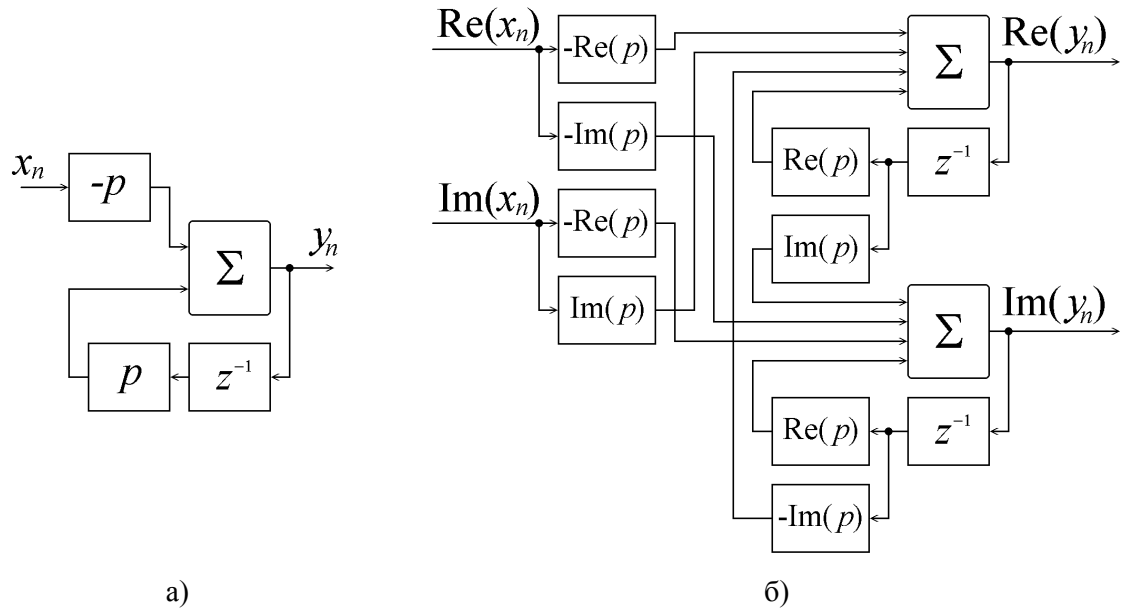


Рис.26. Структурная схема цифрового фильтра с одним комплексным корнем: в формальном комплексном виде (а) и доведенная до действительных операций (б).

Полученный в результате цифровой фильтр (рис.26б), используя чисто действительные операции, в полном смысле слова является комплексным – его входной и выходной сигналы принимают комплексные значения. Как и следовало ожидать, амплитудно-частотная характеристика построенного фильтра, приведенная на рис.27 (жирная линия), не обладает симметрией относительно нулевой частоты. Для сравнения на том же рисунке тонкой линией изображена АЧХ цифрового фильтра с двумя комплексно сопряженными полюсами передаточной характеристики.

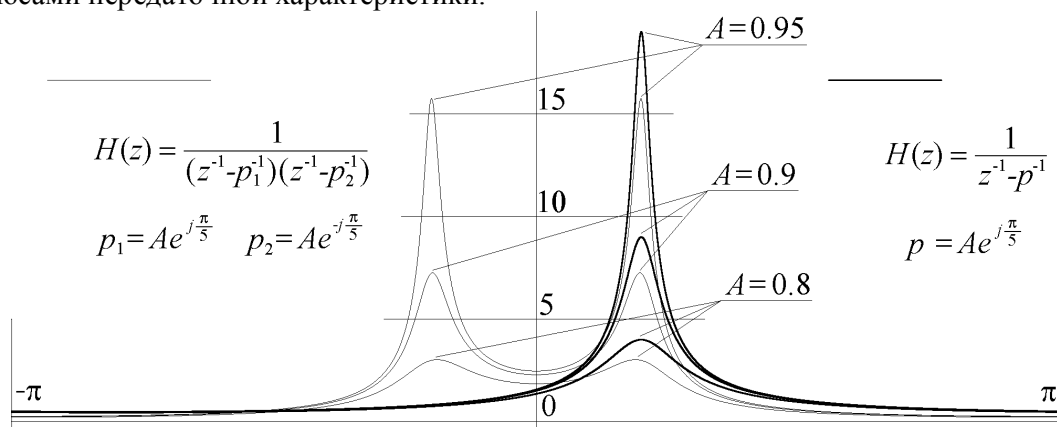


Рис.27. Амплитудно-частотная характеристика цифрового фильтра с одним комплексным полюсом передаточной характеристики.

С экономической точки зрения использование цифровых фильтров с комплексными полюсами вряд ли может представлять интерес – их реализация требует неоправданно большого количества умножителей и сумматоров. Однако эти фильтры обладают одной существенной особенностью – их выходной сигнал, по сути, является аналитическим сигналом [С.И.Баскаков. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 1983, с.152.]. Используя его, например, можно очень легко контролировать изменение во времени амплитуды выходного сигнала:

$$A_n = \sqrt{[\operatorname{Re}(y_n)]^2 + [\operatorname{Im}(y_n)]^2}.$$

Использование комплексных дискретных сигналов, а также элементов их обработки, может позволить решить многие задачи радиотехники, например, осуществление и детектирование сигналов с однополосной модуляцией (SSB).

Контрольные вопросы и задачи.

1. Какую частотную характеристику будет иметь цифровой фильтр с полюсом, лежащим на единичной окружности?

2. Почему на рис.24 рассматривается фильтр именно второго (а не первого) порядка, несмотря на то, что на рис.23 приведена передаточная характеристика фильтра первого порядка?

3. Изобразите схематично АЧХ цифрового фильтра, передаточная характеристика которого имеет три полюса и один ноль:

$$p_1 = 0,98e^{0,3j}; \quad p_2 = p_1^* = 0,98e^{-0,3j};$$

$$p_3 = 0,8;$$

$$z_1 = 1.$$

4. Изобразите схематично АЧХ цифрового фильтра, передаточная характеристика которого имеет один полюс и один ноль:

$$p = 0,98e^{0,3j}; \quad z = e^{0,3j}.$$

5. Изобразите положения нулей передаточной характеристики цифрового фильтра, АЧХ которого приведена на рис.25.

6. Изобразите положения полюсов передаточной характеристики цифровых фильтров, АЧХ которых приведены на рис.27.

7. Чем отличаются АЧХ цифровых фильтров с двумя комплексно сопряженными нулями передаточной характеристики:

$$z_1 = 0,7e^{0,3j}; \quad z_2 = 0,7e^{-0,3j},$$

и

$$z_1 = (1/0,7)e^{0,3j}; \quad z_2 = (1/0,7)e^{-0,3j}.$$

8. Обладает ли комплекснозначный цифровой фильтр симметричной частотной характеристикой $H(-\omega) = H^*(\omega)$?

9. Возможно ли построение комплекснозначного цифрового фильтра, обладающего бесконечной импульсной характеристикой и линейной ФЧХ?

10. Объясните, почему АЧХ цифровых фильтров рис.24 и рис.25 имеют горизонтальный наклон $(d|H(\omega)|/d\omega = 0)$ в точках $\omega\Delta = 0$ и $\omega\Delta = \pi$.

Литература.

В настоящем учебном пособии описываются методы проектирования цифровых фильтров. Рассмотренные вопросы являются лишь составной частью большой совокупности подходов и методов, известных под общим названием Цифровая обработка сигналов (Digital signals processing). Цифровой обработке сигналов в последнее время посвящается все больше литературы, как учебной так и специальной. Ниже перечислены некоторые источники, которые, по общему признанию, можно считать классическими.

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и практика цифровой обработки сигналов. – М., Мир, 1978, 847 с.
2. Голд Б., Рейдер Ч. Цифровая обработка сигналов. – М., Сов. радио, 1973, 367 с.
3. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его применения. – М., Мир, 1990, 584 с.
4. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. – М., Связь, 1980,
5. Применение цифровой обработки сигналов. / Под ред. А.Оппенгейма – М., Мир, 1980, 552 с.
6. Адаптивные фильтры. / Под ред. Коузэна К.Ф.Н. и Гранта П.М. – М., Мир, 1978, 392 с.
7. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. – М., Радио и связь, 1989, 440 с.

Более полный список литературы по цифровой обработке сигналов можно найти на сайте www.dsp-book.narod.ru, где также ведутся широкие дискуссии по различным вопросам цифровой обработке сигналов.