

Решение дифференциальных уравнений в частных производных методами сплайн-аппроксимации

Сидоров А.Н.¹, Плавник А.Г.²

Аннотация

Приведены численные решения краевых задач уравнений математической физики методом наименьших квадратов с использованием бикубических В-сплайнов. Проведено сопоставление с точными решениями и дан анализ зависимости погрешности от весовых коэффициентов. Показано слабое влияние геометрии области задачи на вычислительную эффективность и точность метода.

Введение

Интенсивно развивающийся в последнее время метод восстановления геолого-геофизических полей [1, 2, 3, 4, 11, 12, 13] имеет много общего с вариационными методами решения дифференциальных уравнений в частных производных такими, как метод наименьших квадратов [7], конечных элементов [8, 9], а также с методами решения некорректных задач математической физики [14].

Для описания модели восстанавливаемых геолого-геофизических полей, как в целом в области картирования, так и в отдельных точках наблюдений, используются операторные уравнения вида:

$$L(u) - \sum_{j=1}^M \lambda_j g^j + f = 0 \quad (1)$$

Здесь u – восстанавливаемая поверхность, L – линейный дифференциальный оператор, g^j, f – известные функции координат, λ_j – неизвестные числовые коэффициенты.

Уравнениям (1) ставится в соответствие квадраты норм в пространствах L_2 или l_2 . Целевой функционал конструируется из суммы норм с использованием весовых коэффициентов. Минимум этого функционала ищется в пространстве кубических В – сплайнов [5] и неизвестных λ_j . Для обеспечения существования и единственности решения могут вводятся дополнительные условия на функцию u и коэффициенты λ_j .

¹Научно-аналитический центр рационального недропользования ХМАО (Тюмень)

²Западно-Сибирский филиал Института геологии нефти и газа СО РАН (Тюмень)

Этот метод реализован в программе GST [13], предназначенной для решения широкого круга задач геологоразведки. Интерфейс программы обеспечивает возможность простого ввода коэффициентов дифференциальных уравнений и краевых условий для произвольной ограниченной области. Все вычисления, приводимые ниже выполнены с помощью этой программы.

Математическая постановка решения краевой задачи методом наименьших квадратов

Пусть Ω - некоторая ограниченная, в общем случае многосвязная, область в R^2 , с границей $\partial\Omega$. и S -ограниченная область, содержащая $\Omega + \partial\Omega$. И пусть $H(S)$ - гильбертово пространство. Дано уравнение

$$A(x, D)u(x) = \sum_{k=0}^2 \sum_{i=0}^k a_{k-i,i} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k-i} \partial x_2^i} = \nu(x) \quad (2)$$

где A - линейный дифференциальный оператор второго порядка с известными коэффициентами, заданными в области S , $\nu(x)$ - достаточно гладкая функция на S , и $u \in H(S)$.

Пусть задана система уравнений на фрагментах границы области Ω .

$$\begin{aligned} L_1 u &= g_1, & x \in \partial\Omega_1 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ L_n u &= g_n, & x \in \partial\Omega_n \end{aligned} \quad (3)$$

где L - линейные непрерывные операторы. Будем считать, что система уравнений (3) выбрана таким образом, что решение задачи (2)-(3) существует и единственно.

Приближенное решение задачи (2), (3) находится методом наименьших квадратов [7]. Поставим в соответствие дифференциальному уравнению в частных производных (2) и краевым условиям (3) функционал :

$$J(u) = \|A(x, D)u - \nu\|_{L_2(S)}^2 + \sum_{i=1}^n \rho_i \|L_i u - g_i\|_{L_2(\partial\Omega_i)}^2 \quad (4)$$

Где $\rho_i > 0$, весовые коэффициенты.

Пусть $F_h(S)$ - конечномерные подпространства $H(S)$ с базисом $\omega_{ij}(x, y)$ ($i = 0, \dots, N+1$; $j = 0, \dots, M+1$), в качестве которого выбраны кубические В - сплайны из прямоугольной области, $S = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, содержащей $\Omega + \partial\Omega$. Построим в S - прямоугольную сетку $\Delta(h_1, h_2)$ с эквидистантными по x и y узлами $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$, $c = y_1 < y_2 < \dots < y_M = d$.

Будем искать приближенное решение задачи (4) в виде $\hat{u}(x, y) = \sum \hat{u}_{ij} \omega_{ij}$. В этом случае, задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{kl} (\alpha_{ijkl} + \sum_{r=1}^p \rho_r \gamma_{ijkl}^r) \hat{u}_{kl} = \beta_{ij} + \sum_{r=1}^p \rho_r \delta_{ij}^r \quad (i = 0, \dots, N; j = 0, \dots, M)$$

с симметричной, положительно-определенной, ленточной матрицей. Где

$$\begin{aligned}\alpha_{ijkl} &= (A(x, D)\omega_{ij}, A(x, D)\omega_{kl})_{L_2(S)}, \\ \beta_{ij} &= (A(x, D)\omega_{ij}, v)_{L_2(S)}, \\ \gamma_{ijkl}^r &= (L_r\omega_{ij}, L_r\omega_{kl})_{L_2(\partial\Omega_r)}, \\ \delta_{ij}^r &= (L_r\omega_{ij}, g_r)_{L_2(\partial\Omega_r)}.\end{aligned}$$

Для численного решения этой системы использовался метод LDL^T - факторизации.

Численные эксперименты

Рассмотрим применение кубических В – сплайнов в методе наименьших квадратов на примере решения некоторых линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Пример 1. Уравнение Пуассона:

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = -2 \quad (5)$$

в области $\Omega = (0, 1) \times (-1, 1)$,

$$u = 0, (x, y) \in \partial\Omega. \quad (6)$$

Точное решение этого уравнения имеет вид [6]:

$$u(x, y) = x(1-x) - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{ch(n\pi y)sh(n\pi x)}{n^3 ch(n\pi)}$$

Зададим прямоугольную область $S = (-0.05, 1.05) \times (-1.05, 1.05)$, включающую Ω и прямоугольную сетку с шагом по x и y равным $h_x = h_y = 0.05$. Границу области $\partial\Omega$, аппроксимируем ломанной Γ , с расстояниями между вершинами 0.05. Зададим нулевые значения функции u в этих вершинах. Запишем задачу (5), (6) с учетом (4) в виде функционала метода наименьших квадратов:

$$\Phi(u) = \int_S (\Delta u + 2)^2 ds + \rho \sum_{l=1}^q u(\xi_l, \eta_l)^2$$

Здесь (ξ_l, η_l) – координаты вершин границы $\Gamma (l = 1, 2, \dots, q)$.

Весовой множитель $\rho > 0$, в этих примерах подбирался из соображения минимума невязки приближенного и точного решения (приведенного в [6]) в 4-х контрольных точках. На рис.1 приведен график зависимости максимальной абсолютной ошибки прогноза в контрольных точках от величины веса ρ . При $\rho \geq 1000$ величина ошибки стабилизируется, относительное значение не превышает $2 \cdot 10^{-5}$.

В рассмотренном примере, граница области Ω согласована с сеткой сплайна. Кроме этого проведена серия численных экспериментов с поворотом области Ω относительно начала координат на некоторый угол (кратный $\pi/18$).

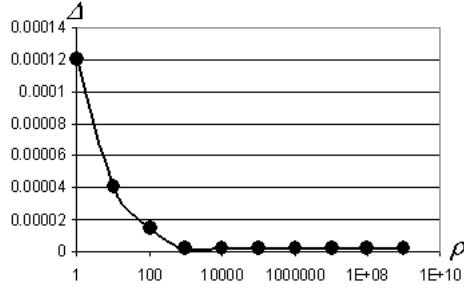


Рис. 1: Уравнения Пуассона. Зависимость погрешности от весового коэффициента

Как показали расчеты, при тех же весовых значениях ρ мы имеем такую же точность, что и исходная.

Пример 2. Уравнение теплопроводности:

$$\partial u / \partial t - a \cdot \partial^2 u / \partial x^2 = 0$$

в области $\Omega = (0, L) \times (0, T)$. Начальная температура одинакова $u(x, 0) = U_0$. На обеих границах поддерживается нулевая температура $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Точное решение этого уравнения имеет вид [10]:

$$u(x, t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin \left[\frac{(2n+1)\pi x}{L} \right] \exp \left[-\frac{a(2n+1)^2 \pi^2 t}{L^2} \right] \quad (7)$$

В этом примере $a = 10, L = 100, T = 100, U_0 = 100$. Как и в предыдущей задаче, зададим прямоугольную область $S = (-1, 101) \times (-1, 101)$. Шаг сетки выберем одинаковым по x и t – соответственно, $h_x = h_t = 1$. Запишем функционал метода наименьших квадратов:

$$\Phi(u) = \int_S (\partial u / \partial t - a \cdot \partial^2 u / \partial x^2)^2 ds + \rho \sum_{i=1}^n (u(0, t_i)^2 + u(L, t_i)^2) + \rho \sum_{j=1}^m (u(x_j, 0) - U_0)^2$$

Весовой множитель для начальных и краевых условий выбран одним и тем же. Для сравнения использовались точные, вычисленные по формуле (7), значения в 10 контрольных точках. Построен график зависимости максимальной абсолютной ошибки прогноза в контрольных точках от ρ (Рис.2). В отличие от предыдущего примера погрешность метода в зависимости от выбора весового коэффициента имеет явно выраженный минимум, который соответствует значению $\rho_{min} \cong 0.1$ (относительные погрешности при этом составляют 10^{-3}).

Кроме приведенных в этой работе примеров, были проведены и другие численные эксперименты. Получены приближенные решения гиперболического уравнения (Клейна – Гордона), уравнений с коэффициентами, зависящими от координат (Шредингера с квадратичным потенциалом, Трикоми) и других. Во всех этих примерах также получена удовлетворительная сопоставимость с точными решениями. Отмечается слабая зависимость точности результатов от геометрии области Ω .

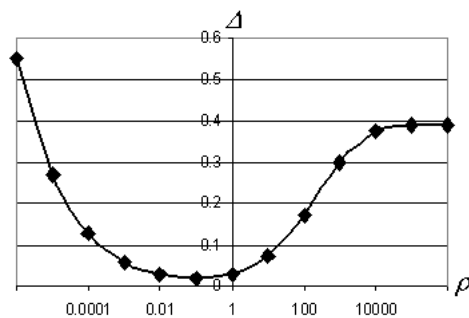


Рис. 2: Уравнение теплопроводности. Зависимость погрешности от весового коэффициента

Список литературы

- [1] Волков А.М. Геологическое картирование нефтегазоносных территорий с помощью ЭВМ. - М.: Недра, 1988. - 221 с.
- [2] Волков А.М. Решение практических задач на ЭВМ. М.: Недра, 1980. -244с.
- [3] Волков А.М., Пятков В.И., Торопов С.В. Сплайн-аппроксимация в задачах картирования/ Проблемы нефти и газа Тюмени, 1978, вып. 39. с.74-78.
- [4] Волков В.А. Моделирование геологических поверхностей в связи с задачами размещения скважин и установления достаточности разведки нефтяных и газовых месторождений// Обзорная серия: Математические методы исследований в геологии.-М., ВИЭМС, 1977. – с. 71.
- [5] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
- [6] Касти Дж., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математке. М.: Мир, 1976. –223с.
- [7] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики . «Наука», М., 1977, 456 с.
- [8] Пацко Н.Л. О численном решении эллиптических краевых задач методом конечных элементов с применением В – сплайнов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. т. 34. №10. с. 1412-1426.
- [9] Пацко Н.Л., Субботин Ю.Н. В – сплайны в методе конечных элементов. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. т. 38. №1. с. 15-24.
- [10] Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.

- [11] Сидоров А.Н. Метод построения оптимальных карт/ Тр. ЗапСибНИГНИ, вып. 192, Тюмень, 1984. –с.32-39.
- [12] Сидоров А.Н. Математические методы обработки и интерпретации геолого – геофизической информации на примере построения карт геологических параметров// Проблемы нефти и газа Тюмени. – Тюмень. 1979. –Вып. 42. с 59-64.
- [13] Сидоров А.Н., Плавник А.Г., Шутов М.С. и др. Комплексы программ моделирования геологических поверхностей и подсчета запасов – GeoFluid, Medium, GST. Пути реализации нефтегазового потенциала ХМАО. Шестая научно-практическая конференция. Ханты-Мансийск, 2003, т. 2, с. 257-258.
- [14] Тихонов АН., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач : [Учебное пособие для студентов вузов].- 3-е изд., испр.- М.: Наука, 1986.- 286 с.